

1 Un peu de changements de variable

Ex.1.1) Soit $f \in \mathcal{C}^0([-a, a], \mathbb{R})$ avec $a > 0$. Par changement de variable, retrouver les propriétés géométriques suivantes :

(i) Si f est paire, montrer que $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$,

(ii) Si f est impaire, montrer que $\int_{-a}^a f = 0$.

Ex.1.2) Soit $a > 0$, calculer $\int_0^x \frac{1}{a^2 + u^2} du$ pour tout $x > 0$. (On se rappellera que l'on sait intégrer $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$.)

Ex.1.3) Pour $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, calculer $\int_a^b (t - a)^3(b - t)^3 dt$.

Ex.1.4) Trouver une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{\cosh(x)}{\sinh^4(x)}$ grâce au changement de variable $u = \sinh(x)$ (en indiquant bien sûr les intervalles considérés).

Ex.1.5) (i) Pour une intégrale de la forme $\int_a^b f(x^n) \frac{dx}{x}$ (pour $0 < a < b$), on remarque que le changement de variable $u = x^n$ est intéressant.

(ii) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x(1 + x^n)} dx$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex.1.6) Rappeler les formules exprimant $\cos(x), \sin(x), \tan(x)$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$ (et leurs domaines de validité). Les utiliser pour trouver les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$, peut être avec le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$.

Ex.1.7) Calculer une primitive de $f : x \mapsto \frac{x}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^4}}$ (sur le bon domaine de définition). On pourra utiliser le changement de variable $x^2 = \cos(u)$.

2 Intégration par partie et/ou primitives

Ex.2.1) Calculer $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$,

Ex.2.2) Calculer $\int_0^x \arctan(t) dt$ pour tout $x > 0$,

Ex.2.3) (*Lemme de LEBESGUE*) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, montrer que $\int_a^b \sin(nt) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Bonus : On pourra essayer de généraliser à f seulement continue, puis seulement continue par morceaux.

Ex.2.4) Calculer une primitive de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (3x^2 + 5x - 12) \cos(x)$,

Ex.2.5) Calculer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x) \cos^2(x)}$ sur un domaine de votre choix,

Ex.2.6) Calculer une primitive de $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$,

Ex.2.7) Calculer une primitive de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ en intégrant par partie.

Bonus : On pourra essayer de généraliser à $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

3 Autres exercices

Ex.3.1) Soient $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}$.

Une idée d'une généralisation ?

Ex.3.2) Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Prouver qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}), f(a) = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(t) dt \leq C \int_a^b (f')^2(t) dt.$$

Ex.3.3) Calculer $I = \int_a^b \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$ et $J = \int_a^b \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$, en supposant¹ que $[a, b]$ ne contiennent aucun élément congru à $-\frac{\pi}{4}$ module π .

Ex.3.4) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, on suppose que f'' est bornée sur \mathbb{R} . Montrer² que l'on a :
 $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2 \|f''\|_\infty f(x)}$.

Ex.3.5) Trouver³ l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = x^2.$$

Ex.3.6) (*Égalité de TAYLOR-LAGRANGE*) Soit $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a, b[, \mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer⁴ qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

1. Pouvez-vous justifier cette hypothèse ?
2. En utilisant l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE pour f à l'ordre 2 pour obtenir un polynôme de degré 2 en h
3. On pourra prouver qu'une solution est nécessairement de classe \mathcal{C}^∞ , puis qu'elle vérifie une équation différentielle *simple* à résoudre.

4. On pourrait utiliser le théorème de ROLLE avec la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \lambda$, avec un λ choisi tel que $g(a) = g(b)$.

Ex.3.7) Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)dt = f^2(x)$.

4 Compléments

Ex.4.1) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que l'on a $\forall \alpha, \beta \in [a, b], \int_\alpha^\beta f = 0$. Prouver que $f = 0$.

Ex.4.2) Soient $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que l'on a $(\int_a^b (f+g)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b f^2)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b g^2)^{\frac{1}{2}}$.

Ex.4.3) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer⁵ que l'on a : $\|f\|_\infty \leq \int_a^b |f'| + \frac{1}{b-a} \int_a^b |f|$.

Ex.4.4) Calculer⁶ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

Ex.4.5) (**Bonus**) Calculer⁷ $\lim_{n > 0, n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$.

Ex.4.6) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0 et que $f(0) = 0$. Calculer⁸ alors $\lim_{n > 0, n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{1}{n+kp}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Ex.4.7) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on veut montrer que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f|^n \right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty$.

- (i) Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $|f(c)| = \|f\|_\infty$,
- (ii) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage $[\alpha, \beta]$ de c sur lequel on a $|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$,
- (iii) En déduire que la suite est minorée par la suite de terme général $(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} (\|f\|_\infty - \varepsilon)$,
- (iv) Obtenir une majoration de la suite du même genre et conclure par le théorème d'encadrement.

5. On pourra prouver l'existence de deux $c, d \in [a, b]$ tels que $|f(c)|$ réalise le minimum de $|f|$, et $|f(d)|$ le maximum. Écrire alors $|f(d)| \leq |f(d) - f(c)| + |f(c)|$ et conclure!

6. On pourra majorer et minorer les termes de la suite par les termes d'une somme de RIEMANN convergeant vers $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

7. En nommant u_n le terme général de la suite à étudier, on se ramènera à $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$. On pourra se ramener à une somme de RIEMANN pour v (le logarithme d'un produit étant la somme des logarithmes).

8. On pourra montrer que cette limite est la même que $\lim_{n > 0, n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+kp} f'(0)$.