

Pour ces exercices, a et b désignent deux réels, vérifiant $a < b$.

Ex.1) Étudier¹ la limite (pour $n \rightarrow +\infty$) des suites de terme général (définis pour tout $n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx, & \text{(iii)} \quad K_n &= \int_0^n \frac{\sin(nx)}{n^2+x^4} dx, \\ \text{(ii)} \quad J_n &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (\arcsin(x))^n dx, & \text{(iv)} \quad L_n &= \int_0^{n^2} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^4} dx. \end{aligned}$$

Ex.2) Calculer² les limites suivantes :

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{1+t^4} dt, \quad \text{(ii)} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 x^3 \sqrt{1+a^3 x^3} dx.$$

Ex.3) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$. Montrer³ que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Ex.4) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On considère la fonction définie sur $[a, b]$ par $F(x) := \int_a^x f(t) dt$. Montrer que F est bien définie, et qu'elle est k -lipschitzienne (pour un certain $k \in \mathbb{R}_+$ à déterminer). F est-elle dérivable? Si oui, que peut-on dire de F' ?

Ex.5) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Étudier⁴ la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Ex.6) On considère la suite $I = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

- (i) Justifier l'existence puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$,
- (ii) Trouver une relation de récurrence *simple* reliant I_{n+1} et I_n (pour tout $n \in \mathbb{N}$),
- (iii) On considère désormais la suite $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S en fonction de I ,
- (iv) En déduire la convergence de cette suite S et sa limite.

1. Pour la seconde, majorer le arcsin grossièrement suffira, tandis que pour la dernière, on pourra découper en deux, en s'aidant de l'intégrale précédente.

2. Pour la première, on pourra majorer l'intégrande par une quantité ne dépendant que de x et étudier sa limite; pour la seconde, on pourra encadrer $\sqrt{1+a^3 x^3}$ par une quantité ne dépendant pas de x et calculer les intégrales ainsi obtenues.

3. On pourra s'intéresser au signe de $\int_a^b f$ et traiter les deux cas.

4. On pourra comparer l'intégrale recherchée avec $\int_0^1 f(0) dx$.

- Ex.7) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Calculer⁵ la limite de la suite de terme général $I_n \stackrel{\text{def}}{=} n \int_0^1 x^n f(x) dx$ (défini pour $n \in \mathbb{N}$).
- Ex.8) On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (f_n(x))^4 dx = 0$. Montrer⁶ que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0$.
- Ex.9) Soit $f \in \mathcal{D}^1([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $|f'|$ est majorée sur $[a, b]$ par un certain $M \in \mathbb{R}_+$, et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que l'on a $\left| \int_a^b f \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M$.
- Ex.10) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{n > 0, n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}$.
- Ex.11) Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$.
- Ex.12) Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{en}$.
- Ex.13) Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose f et g positives, et vérifiant $fg \geq 1$. Montrer⁷ que l'on a $\left(\int_0^1 f \right) \times \left(\int_0^1 g \right) \geq 1$.
- Ex.14) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ (attention, f est à valeurs complexes). On suppose que $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$. Montrer que l'argument de f est constant (aux points où f est non nulle).
- Ex.15) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t f(t) dt = \int_0^1 t^2 f(t) dt = 0$. Montrer⁸ que f admet au moins trois zéros sur $[0, 1]$. f peut elle en avoir plus ?
- Ex.16) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$. Prouver que $f = 0$. On pourra (au choix) utiliser le *théorème de convergence dominée de Riemann*, ou bien procéder comme suit. On pourra raisonner par l'absurde, et considérer alors $a < b$ telle que $f \geq \eta > 0$ sur $[a, b]$ pour un certain η (quitte à considérer $-f$). Trouver alors un polynôme s'annulant en a et en b , supérieur à 1 sur $[a, b]$, et de valeur absolue strictement inférieure à 1 ailleurs (*i.e.* sur $[0, 1] \setminus [a, b]$). En considérant les puissances de ce polynôme, multipliées par f , on utilisera l'hypothèse sur f pour conclure.

5. On peut essayer d'intuiter la limite en regardant d'abord des exemples précis, puis étudier la différence entre la suite et cette limite, que l'on aura écrite comme une intégrale (cf. Ex.5)).

6. On pourra commencer par montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (f_n(x))^2 dx = 0$.

7. Les amis Augustin Louis C. et Hermann Amandus S. pourraient aider.

8. On pourra raisonner par l'absurde : si f a au plus 2 zéros, on peut trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal 2 tel que $P(f) \geq 0$ et aboutir à une contradiction.