

Ex.1) Montrer les inégalités suivantes :

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ , et  $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ .
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ .
- (iii)  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $2x < \sin(2x) + \tan(x)$ .
- (iv)  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan(x) < x + \frac{x^3}{3}$ .
- (v)  $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ ,  $\frac{\ln(x)}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

Ex.2) Montrer que les deux applications suivantes sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  :

$$\phi = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}.$$

Ex.3) Étudier les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par des relations de récurrence suivantes, sur les intervalles intéressants (qu'il vous faudra préciser), éventuellement selon les valeurs des premiers termes  $u_0, v_0$  :

- (a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, v_{n+1} = \sqrt{6 - v_n}$ .
- (b)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}, v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ .
- (c)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n), v_{n+1} = (1 - v_n)^2$ .
- (d)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n^2 - 1}, v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n}$ .
- (e)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1 - u_n}}$ .

Ex.4) La somme, le produit, la composée de deux fonctions convexes sont-ils convexes ? (Comme toujours, une preuve si c'est vrai, un contre-exemple si c'est faux.)

Ex.5) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i)_{i \in [1..n]}$  une famille de  $n$  réels strictement positifs.

(a) Montrer que l'on a :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

- (b) Étudier les cas d'égalité pour les trois inégalités.
- (c) La chaîne des deux premières inégalités est souvent écrite "MH  $\leq$  MG  $\leq$  MA", pour "MH" la moyenne hypergéométrique ( $= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ ), "MG" la moyenne géométrique ( $= (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ ), et "MA" la moyenne arithmétique ( $= \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ ).
- (d) Il y a-t-il existence (resp. unicité) d'une famille telle que ces inégalités soit toutes des égalités?

Ex.6) Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une application convexe. Montrer que :

- (a) Si  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ , alors  $f$  est négative,
- (b) Si  $f$  est croissante non constante, alors  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ ,
- (c) Si  $f$  est majorée, alors  $f$  est constante.

**Bonus :** Trouver un exemple de fonction pour les deux premiers cas.

Ex.7) Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , dérivable sur  $]0, 1[$ , vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f(1)f'(1) < 0$ . Montrer que  $f'$  s'annule sur  $]0, 1[$ .

Ex.8) Soit  $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  vérifiant  $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$ . Montrer qu'il existe un point  $M$  de la courbe  $\Gamma_f$  représentative de  $f$ , autre que l'origine, tel que la tangente en  $M$  à la courbe passe par l'origine (*un dessin sera grandement apprécié*).

Ex.9) Soit  $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  admettant une limite finie en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Montrer que  $f''$  s'annule.

Ex.10) (*Deux inégalités classiques*) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i)_{i \in [1..n]}$  et  $(y_i)_{i \in [1..n]}$  deux familles de  $n$  réels strictement positifs. Soit  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ( $p$  et  $q$  sont alors dits *conjugués*).

Montrer<sup>1</sup> l'inégalité suivante, dite *inégalité de HÖLDER* :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En déduire l'*inégalité de MINKOWSKI*, pour  $r > 1$  un réel donné :

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

**Bonus :** Étudier les cas d'égalité de ces deux inégalités.

---

1. On utilisera la convexité de la fonction  $x \mapsto x^p$ .