

Remarque : Pour toutes ces équations différentielles, la variable est $x \in I$ (où I est un intervalle), et l'inconnue est y , une fonction continue, et dérivable de dérivée continue sur I (ie de classe \mathcal{C}^1). Si l'équation fait intervenir y'' , alors on cherche y de classe \mathcal{C}^2 (deux fois dérivable, de dérivée seconde continue).

1 Équations différentielles du premier ordre

Ex.1.1) Résoudre les équations différentielles suivantes (sur les différents intervalles possibles) :

(a) $y' + 3y = x^2 - 4x - 2$,

(b) $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$,

(c) $y' \cdot \sin(x) - y \cdot \cos(x) + 1 = 0$,

(d) $2x \cdot y' + y = x^n$, avec un $n \in \mathbb{N}$,

(e) $|x| \cdot y' + (x - 1) \cdot y = x^2$,

(f) $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$, où l'on pourra chercher trois réels a, b, c tel que¹

$$\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}.$$

(g) $(x \ln(x)) \cdot y' - y = -\frac{1}{x}(\ln(x) + 1)$.

2 Équations différentielles du second ordre

Ex.2.1) Résoudre les équations différentielles suivantes (sur les différents intervalles possibles) :

(a) $y'' + y' - 6y = 15x^2 - 4x - 3$,

(b) $y'' + y' = x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 5x$,

(c) $y'' + 4y = 3 + 3x$,

(d) $y'' + 3y' + 2y = e^x$,

(e) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$,

(f) $y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$,

(g) $y'' + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^x$,

(h) $y'' + y' - 2y = 8 \sin(2x)$,

1. Ce genre de simplification s'appelle une *décomposition en éléments simples*.

$$(i) \quad y'' - 5y' + 6y = \frac{\cosh^2(x)}{e^x},$$

$$(j) \quad y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin(x) - 4e^x \sin(2x),$$

$$(k) \quad y'' + \omega^2 y = x \sin(2x) \text{ pour un certain } \omega \in \mathbb{R} \text{ fixé.}$$

Ex.2.2) Résoudre l'équation différentielle suivante (sur les différents intervalles possibles) :

$$(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0.$$

Ex.2.3) En introduisant $z = xy$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy'' + 2(x-1)y' + (x+2)y = 0.$$

Ex.2.4) On considère (E) l'équation différentielle suivante : $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, où les trois réels a, b, c sont tels que $a > 0$ et $b > 0$.

(a) En posant $z(t) = y(e^t)$, montrer que y est solution (sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$) de (E) l'équation différentielle de départ *si et seulement si* z est solution d'une équation du second ordre à coefficients *constants* que l'on donnera.

(b) Quelle est la forme des solutions de l'équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* (et sur \mathbb{R}_-^*) ?

(c) **Exemple :** Résoudre l'équation $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Ex.2.5) On veut résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$.

(a) Résoudre l'équation sur $] -1, 1[$, en posant $x = \sin(t)$,

(b) La résoudre ensuite sur *tous* les autres intervalles possibles.

3 Autres problèmes

Ex.3.1) Calculer les intégrales suivantes par un changement de variable approprié :

$$(a) \quad \int_a^b \sin^4(x) \cos(x) dx, \text{ pour deux } a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } a < b,$$

$$(b) \quad \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt.$$

Ex.3.2) **Bonus :** Trouver toutes les applications f deux fois dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$