

Ex.1) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^4 + 2)e^{2x}$. Justifier que f est infiniment dérivable, puis calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex.2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n k \cos(kx)$.

Ex.3) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (i.e. f est une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$. La réciproque¹ est-elle vraie ?

Ex.4) Pour $T > 0$, la dérivée d'une fonction T -périodique est-elle encore T -périodique ? Donner un exemple *classique* pour lequel $T = 2\pi$.

Ex.5) On considère le polynôme $P(X) = X^n + aX + b$, avec $n \geq 2, a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que P admet au plus 3 racines réelles *distinctes*.

Ex.6) (*Théorème de DARBOUX*) Soit $f \in \mathcal{D}^1([a, b], \mathbb{R})$ (i.e. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$). On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.

(i) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
(Vous montrez donc qu'une fonction dérivée vérifie toujours le *théorème des valeurs intermédiaires*, même sans être continue partout).

(ii) (**Bonus**) Trouver un exemple d'une fonction f telle que f' ne soit pas continu partout sur $]a, b[$.

Ex.7) *Théorème de ROLLE généralisé*

(i) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, +\infty[, \mathbb{R})$, dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose de plus que $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe un $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

(ii) (**Bonus**) En est-il de même si on remplace la borne inférieure fermée (" a ") par une borne ouverte " $-\infty$ " ? C'est-à-dire si $f \in \mathcal{C}^0(]-\infty, +\infty[, \mathbb{R})$, dérivable sur $] -\infty, +\infty[$. On suppose de plus que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Existe-t-il un $c \in] -\infty, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$? Comme toujours, le prouver si c'est vrai, trouver une contre-exemple si c'est faux !

Ex.8) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Déterminer la classe² de la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^\alpha$.

Ex.9) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, avec $b > a > 0$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(c)}{c} = f'(c)$. **Bonus** : Trouver un exemple d'une telle fonction f .

1. Si cette limite existe, f est-elle dérivable en a ? Si oui, le prouver, si non, une contre-exemple suffit !

2. Rappel : Une fonction est de classe \mathcal{C}^0 si continue ; classe \mathcal{C}^1 si continue, dérivable, de dérivée \mathcal{C}^0 ; classe \mathcal{C}^{k+1} si continue, dérivable, de dérivée \mathcal{C}^k ($\forall k \in \mathbb{N}$).

- Ex.10) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation (en x) $18ax^{17} + 14bx^{13} + 5cx^4 - (a + b + c) = 0$ possède *au moins* une solution dans $]0, 1[$.
- Ex.11) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Donner un exemple de telle fonction f .
- Ex.12) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = \frac{x}{3} + 4$.
- Montrer que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{3} + 4\right) = \frac{f(x)}{3} + 4$,
 - En déduire que f' est constante (sur \mathbb{R}),
 - En déduire l'expression de f .
- Ex.13) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq mx$.
Donner un exemple d'une fonction (trigonométrique) classique qui satisfait ces conditions. Quelle est la plus grande valeur que ce m peut prendre³ ?
- Ex.14) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que f admet une infinité de zéros. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.
- Ex.15) Soient $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$. Montrer que $f' + fg'$ admet un zéro sur $]a, b[$.
- Ex.16) Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = l$ pour un certain $l \in \mathbb{R}$.
Montrer⁴ que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.
- Ex.17) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $f^n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Ex.18) Déterminer les couples d'applications (f, g) dérivables, avec f définie sur \mathbb{R} et g sur \mathbb{R}_+^* , telles que $f \circ g = Id$ et $f' \circ g = Id$.

3. On pensera à une inégalité de convexité pour trouver ce m .

4. On pourra essayer de considérer $g \stackrel{\text{def}}{=} f \times \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)e^x$.