

Courbes paramétrées - Coniques.

1. Étudier les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{4t}{3+t^4} \\ y(t) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{t^3}{3+t^4} \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{e^t}{1+t} \\ y(t) = \frac{te^t}{1+t} \end{cases}$$

2. Étudier les courbes polaires suivantes :

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= \cos(\theta) + \sin(2\theta) & \rho(\theta) &= \cos(\theta) - \cos(2\theta) & \rho(\theta) &= 1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \rho(\theta) &= \frac{1-2\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)} & \rho(\theta) &= \frac{\cos(2\theta)}{2\cos(\theta)-1} & \rho(\theta) &= \frac{1}{\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)}. \end{aligned}$$

Pour la troisième équation, montrer l'existence d'un point double en lequel les tangentes sont orthogonales. Pour la dernière, montrer qu'une droite passant par O coupe la courbe en trois points et que les tangentes en ces trois points à la courbe forment un triangle équilatéral.

3. Étudier la courbe polaire : $\rho(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)} + \sqrt{1-\sin(2\theta)}}$. Chercher tout d'abord à le faire sans regarder la courbe sur une calculatrice. Si un résultat intéressant semble apparaître, trouver un moyen de le démontrer!¹
4. On considère la parabole d'équation $y = x^2$ dans le plan euclidien. Soit M un point de la parabole différent de l'origine. La normale à la parabole en M recoupe la parabole en un point N . On note P_M l'intersection de la parallèle en M à la tangente en N à la parabole et de la parallèle en N à la tangente en M à la parabole. Déterminer et tracer l'ensemble des points P_M lorsque M décrit la parabole (l'origine exclue).
5. On considère l'ellipse du plan euclidien d'équation $x^2 + 5y^2 = 5$. Tracer l'ellipse et l'ensemble des centres des cercles passant par O et tangent à l'ellipse. (On pourra écrire le centre d'un tel cercle comme intersection de deux droites bien choisies.)²
6. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des coniques suivantes :
- $$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 3x + 4y + 2 &= 0 & x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 &= 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 2 &= 0 & x^2 + \sqrt{3}xy - y^2 + 3x - 4y - 4 &= 0. \end{aligned}$$
7. Trouver la nature de la conique $x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0$ et en déduire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont solutions de l'équation $x^3 + 3xy + y^3 - 1 = 0$. Résoudre ensuite, dans \mathbb{Z}^2 , l'équation $n^3 + 3mn + m^3 = 1$.

1. Il faut ici manipuler les expressions trigonométriques afin de simplifier l'expression de ρ puis passer en coordonnées cartésiennes pour avoir le résultat final.

2. On paramétrise l'ellipse en coordonnées cartésiennes. Pour un point M de l'ellipse, on considère ensuite l'intersection de la médiatrice de [OM] et de la normale à l'ellipse au point M.