

Équations différentielles.

- ✓ 1. Calculer les intégrales suivantes par un changement de variable approprié :
- (a) $\int_a^b \sin^4(x) \cos(x) dx$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.
- (b) $\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt$
- ✓ 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les différents intervalles possibles :
- (a) $y' + 3y = x^2 - 4x - 2$
- (b) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$
- (c) $y' \sin(x) - y \cos(x) + 1 = 0$.
- (d) $2xy' + y = x^n$. avec $n \in \mathbb{N}$.
- (e) $|x|y' + (x-1)y = x^2$.
- (f) $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$. (on pourra chercher trois réels (a, b, c) tels que l'on ait : $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$).
- (g) $(x \ln(x))y' - y = -\frac{1}{x}(\ln(x) + 1)$.
- ✓ 3. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les différents intervalles possibles.
- (a) $y'' + y' - 6y = 15x^2 - 4x + 3$
- (b) $y'' + y' = x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 5x$
- (c) $y'' + 4y = 3 + 3x$
- (d) $y'' + 3y' + 2y = e^x$
- (e) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
- (f) $y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$
- (g) $y'' + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)e^{2x}$
- (h) $y'' + y' - 2y = 8 \sin(2x)$
- (i) $y'' - 5y' + 6y = \frac{ch^2(x)}{e^x}$.
- (j) $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin(x) - 4e^x \sin(2x)$
- (k) $y'' + \omega^2 y = x \sin(2x)$ pour $\omega \in \mathbb{R}$.
- ✓ 4. Résoudre l'équation différentielle suivante sur tous les intervalles possibles :
 $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0$.
- ✓ 5. En posant $z = xy$, résoudre l'équation différentielle suivante :
 $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$.
- ✓ 6. Résoudre l'équation différentielle : $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.
- ✓ 7. On considère l'équation différentielle suivante : $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
- (a) En posant $z(t) = y(e^t)$, montrer que y est solution sur \mathbb{R}^{+*} de l'équation différentielle de départ si et seulement si z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on donnera.
- (b) Quelle est la forme des solutions de l'équation différentielle sur \mathbb{R}^{+*} ? Sur \mathbb{R}^{-*} ?
- (c) Résoudre l'équation : $x^2y'' - xy' + y = 0$.
8. On veut résoudre l'équation : $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$.
- (a) Résoudre l'équation sur $] -1, 1[$ en posant $x = \sin(t)$.
- (b) La résoudre ensuite sur les autres intervalles.
- ✓ 9. Trouver toutes les applications f deux fois dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.