

## Fonctions usuelles

**TODO :** Il manque des exercices sur les graphiques, et les propriétés géométriques (asymptote, ...).

- Résoudre, sur l'ensemble approprié, l'inéquation :  $\ln|x+2| + \ln 3 \leq \ln|3x-4|$ .
- Montrer que les fonctions suivantes réalisent des bijections, sur les ensembles appropriés, et donner l'expression de leurs réciproques (en explicitant leurs domaines de définition) :

$$(1) f_1 : x \mapsto 3x - 5,$$

$$(4) f_4 : x \mapsto \frac{1}{3x-2},$$

$$(2) f_2 : x \mapsto \sqrt{3} - x,$$

$$(5) f_5 : x \mapsto \frac{3x+2}{2x-1},$$

$$(3) f_3 : x \mapsto x^2 - 1 \text{ (sur } \mathbb{R}_-),$$

$$(6) f_6 : x \mapsto \ln(2e^x - 1),$$

- Reprendre l'exercice précédent, mais en étudiant la dérivabilité des fonctions et de leurs réciproques, puis en calculant ces dérivées. En bonus, on pourra essayer de chercher les points où les fonctions s'annulent et ceux où leur dérivée s'annule.
- Donner les ensembles de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

$$(1) f_1 : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

$$(3) f_3 : x \mapsto \ln(\cos(x)),$$

$$(4) f_4 : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}},$$

$$(2) f_2 : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{-x^2 - x + 6}\right),$$

$$(5) f_5 : x \mapsto \sin(x)^{\cos(x)},$$

$$(6) f_6 : x \mapsto x^{x^x} \text{ (lu comme } x^{(x^x)}),$$

- Soient  $f$  et  $g$  définies par  $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  et  $g : x \mapsto \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ . Déterminer les ensembles de définition de ces fonctions. Établir le tableau de variation de  $f$ , et montrer que lorsque que cela a un sens, on a  $f(x) + g(x) = 0$ . Pouvez-vous donner le nom usuel de cette fonction  $f$  ?
- Préciser les valeurs (de  $x$ ) pour lesquelles les expressions suivantes ont un sens, et les simplifier tant que possible :

$$(1) x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}},$$

$$(2) \ln_x(\ln_x(x^{x^x})) \text{ (où on rappelle que } \ln_x \text{ est la fonction } \mathbf{logarithme en base } x \text{.)}$$

- Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant bien sûr l'ensemble :

$$(1) f : x \mapsto \arccos(x-1),$$

- (2)  $f : x \mapsto \arctan|x|$  (raccourcis syntaxique pour  $\arctan(|x|)$ , fréquemment employé),
- (3)  $f : x \mapsto \operatorname{arcsinh}(\sqrt{x^2 - 1})$ ,
8. Résoudre l'équation  $\sinh(x) = 3$ , **sans** utiliser de calculatrice ni la formule exprimant  $\operatorname{arcsinh}$  en terme de logarithme.
9. Trouver<sup>1</sup> la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ .
10. Résoudre<sup>2</sup> l'équation  $\sum_{k=0}^n \sinh(2 + kx)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
11. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{arcsinh}(x) &= 2 \operatorname{arcsinh}(y) \\ 2 \ln(x) &= 2 \ln(y) \end{cases}$$

12. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , résoudre l'équation (en  $x$ ) suivante :

$$(\cosh(x) + \sinh(x))^{\operatorname{arcsinh}(x-a)} = (\cosh(x) - \sinh(x))^{\operatorname{arcsinh}(x-b)}.$$

13. Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , calculer les deux sommes suivantes :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cosh(kx)$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sinh(kx)$ .
14. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , montrer que, si  $x = \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}))$ , alors :  $\tanh(\frac{x}{2}) = \tan(\frac{y}{2})$ ,  
 $\tanh(x) = \sin(y)$  et  $\cosh(x) = \frac{1}{\cos(y)}$ .
15. Simplifier les expressions suivantes :

- (1)  $\arctan(\tan(\frac{5\pi}{6}))$ ,
- (2)  $\arctan(\sin(\frac{\pi}{6}))$ ,
- (3)  $\arctan(\cos(-\frac{\pi}{6}))$ .

16. Étudier les expressions suivantes (on cherchera une astuce) :

- (1)  $\arccos(\frac{1-t^2}{1+t^2}) + \arcsin(\frac{2t}{1+t^2})$ , pour  $t \in \mathbb{R}$ ,
- (2)  $\arctan(\frac{x+y}{1-xy}) - \arctan(x) - \arctan(y)$ , pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $xy \neq 1$ .

17. Résoudre les équations suivantes :

---

1. On pourra écrire les puissances à l'aide d'exponentielles.

2. On pourra utiliser une technique assez similaire à celle utilisée pour calculer  $\sum_{k=0}^n \sin k\theta = 0$ .

- (1)  $\tan(3 \arcsin(x)) = 1$ ,
- (2)  $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{5}$ .
- (3)  $\arctan\left(\frac{p}{q}\right) + \arctan\left(\frac{q-p}{q+p}\right) = \frac{\pi}{5}$  avec  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  vérifiant  $0 < p < q$ .

18. Calculer les sommes suivantes :

- (1)  $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$ ,
- (2)  $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$ ,