

Fonctions réelles d'une variable réelle.

I désigne un intervalle de \mathbb{R} ayant au moins 2 éléments, sauf mention contraire.

1. Soit f une fonction k -lipschitzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. Prouver qu'elle est k -lipschitzienne sur $[a, c]$ (on suppose donc, a priori, que le " k " n'est pas le même sur $[a, b]$ et $[b, c]$).
2. Prouver que la somme de deux fonctions k -lipschitziennes est aussi k -lipschitzienne. Qu'en est-il du produit? De la composée?
3. Soit f une fonction k -lipschitzienne de I dans \mathbb{R} . Prouver l'existence de $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\forall x \in I, |f(x)| \leq A|x| + B$.
4. Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = \cos(\ln(x))$ n'a pas de limite en $+\infty$.
5. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , périodique. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$ alors elle est constante sur \mathbb{R} .
6. Soit f et g deux fonctions de I dans \mathbb{R} continues en $x_0 \in I$. Montrer que $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues en x_0 .
7. Soit f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose de plus que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$. Déterminer¹ f .
8. Soit f une fonction continue sur I telle que $f^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.
9. Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Soit (p, q) un couple de réels strictement positifs. Montrer l'existence de $x_0 \in [0, 1]$ tel que $pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0)$.
10. Un coureur parcourt 100km en 10 heures. Montrer qu'il existe une période d'une heure où il parcourt exactement 10km.
11. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'elle admet un point fixe (à savoir un réel $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$). Même chose si on suppose juste que f est croissante.²
12. Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$. Montrer que :
 - (a) (f continue et injective) implique f (strictement) monotone.³
 - (b) (f croissante et $\forall z \in [f(0), f(1)], \exists c \in [0, 1], f(c) = z$) implique f continue.⁴
13. On cherche les fonctions $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$.
 - (a) Montrer que l'on a : $f \geq 0$.
 - (b) On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. Montrer alors que l'on a $f = 0$.
 - (c) Dans le cas où $f \neq 0$, déterminer f (on pourra se ramener⁵ à une équation fonctionnelle connue)
14. Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que f admette pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f admet un minimum.
15. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Montrer que :
 - (a) Si $\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$ alors : $\exists m > 0, \forall x \in [a, b], f(x) + m \leq g(x)$.
 - (b) Si $\forall x \in [a, b], 0 < f(x) < g(x)$ alors : $\exists C > 1, \forall x \in [a, b], Cf(x) \leq g(x)$.
16. Soient f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. On suppose que l'on a $0 < f < g$. On considère alors une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[0, 1]$. Que peut-on dire⁶ de la suite $((\frac{f(x_n)}{g(x_n)})^n)_{n \in \mathbb{N}}$?

¹on pourra s'intéresser, pour $x \in \mathbb{R}^+$, à la suite $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

²On pourra s'intéresser à $\{x \in [0, 1] | f(x) \geq x\}$, et à son éventuelle borne supérieure

³on n'hésitera pas à abuser du TVI dans cet exercice! SE ramener par exemple à $f(0) \leq f(1)$ puis montrer, pour $x \leq y$, que $f(x) \leq f(y)$ par l'absurde

⁴on pourra montrer que les limites à gauche et à droites coïncident, encore une fois par l'absurde

⁵penser à introduire $g = \ln(f)$

⁶on pourra montrer que la suite est majorée par une suite géométrique de raison $q < 1$

17. Soit f une application uniformément continue de I dans \mathbb{R}

(a) Montrer l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in I, f(x) \leq a|x| + b$.

(b) On suppose l'existence de deux réels $a < b$ tel que $I =]a, b[$. Montrer que f est bornée.

18. Montrer que l'application racine carrée, de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , est uniformément continue mais n'est pas k -lipschitzienne.⁷ (On pourra d'ailleurs trouver une caractérisation des fonctions k -lipschitziennes en terme d'existence de la borne supérieure d'un certain ensemble)

19. Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que f admet une limite finie en $\pm\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R} .

20. On cherche à résoudre $f \circ f + Id = 0$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

(a) Prouver qu'une éventuelle solution est injective.

(b) Remarquer que Id n'est pas strictement décroissante et conclure⁸.

21. Équation fonctionnelle : on considère une fonction f continue sur \mathbb{R} et vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$.

(a) Calculer $f(0)$ et trouver la parité de f .

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = n^2 f(x)$.

(c) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}, f(px) = p^2 f(x)$.

(d) Conclure.⁹

22. Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , continue, et vérifiant : $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer alors que f est affine.¹⁰ (c'est à dire de la forme $x \rightarrow ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$).

23. Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f^{-1}(c)$ n'ait pas exactement 2 éléments.¹¹