

Dérivation.

1. On considère la fonction définie par $f(x) = (x^4 + 2)e^{2x}$ sur \mathbb{R} . Calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n k \cos(kx)$.
3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$. La réciproque est-elle vraie?
4. Soit $f \in D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer la limite, lorsque h tend vers 0, de $\frac{f^2(x+3h) - f^2(x-h)}{h}$.
5. La dérivée d'une fonction T -périodique est-elle T -périodique?
6. On considère le polynôme $P(X) = X^n + aX + b$ avec $n \geq 2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que P admet au plus 3 racines réelles distinctes.
7. (théorème de Darboux) Soit $f \in D^1([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. (en gros, une fonction dérivée n'est pas forcément continue mais vérifie quand même le théorème des valeurs intermédiaires).
8. (théorème de Rolle généralisé) Soit $f \in C^0([a, +\infty[)$ dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose de plus que $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la classe de $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow |x|^\alpha$.
10. Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ avec $a > 0$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(c)}{c} = f'(c)$.
11. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'équation $18ax^{17} + 14bx^{13} + 5cx^4 - (a + b + c) = 0$ possède au moins une solution dans $]0, 1[$.
12. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
13. Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = \frac{x}{3} + 4$.
- (a) Montrer que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(\frac{x}{3} + 4) = \frac{f(x)}{3} + 4$.
- (b) Montrer ensuite que f' est constante.
- (c) En déduire f .
14. Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq mx$.
15. Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que f admet une infinité de zéros. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.
16. Soit $(f, g) \in (C^0([a, b], \mathbb{R}))^2$ dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$. Montrer que $f' + fg'$ admet un zéro sur $]a, b[$.
17. Soit $f \in D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = l \in \mathbb{R}$. Montrer¹ que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.
18. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $f^{(n)}(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
19. Trouver les couples d'applications (f, g) dérivables avec f définie sur \mathbb{R} et g sur \mathbb{R}^{+*} telles que $f \circ g = Id$ et $f' \circ g = Id$.

¹ on pourra considérer $g = f \cdot \exp$

$$\begin{cases} g = f \cdot e \\ f' \circ g = Id \end{cases}$$

Calculs de dérivées pour améliorer sa technique.

Pour chaque cas : déterminer l'ensemble de définition de f , un ensemble de dérivabilité (on utilise les théorèmes de terminale pour obtenir la dérivabilité mais pas la peine de prouver la non dérivabilité éventuelle pour les points que l'on laisse ainsi) et calculer la dérivée sur cet ensemble.

Si la fonction fait apparaître un paramètre, le résultat fera éventuellement intervenir une discussion selon les valeurs du paramètre (réel sauf mention contraire).

1. * $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
2. * $f(x) = \ln(\sqrt{2 \sin(x) + 1} + \sqrt{2 \sin(x) - 1})$
3. * $f(x) = \arctan \frac{\ln(x)}{3}$
4. * $f(x) = e^x \arctan(e^x) - \ln(\sqrt{1 + e^{2x}})$
5. * $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + k})$
6. * $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right)$
7. * $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)$
8. * $f(x) = x^{x^2}$
9. * $f(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2})) - \frac{x}{\sin(x)}$
10. * $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} - \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
11. * $f(x) = \frac{1}{4a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + \frac{1}{2a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
12. * $f(x) = \arctan\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$
13. * $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$
14. * $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^4}-x^2}{\sqrt{1+x^4}+x^2}\right)$
15. * $f(x) = \sqrt{x} \arcsin(\sqrt{x}) + \sqrt{1-x}$
16. * $f(x) = \arcsin\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}\right)$
17. * $f(x) = \arctan\left(\frac{x^x - x^{-x}}{2}\right)$
18. * $f(x) = \frac{x^x}{e^x} (x \ln(x) - x - 1)$
19. * $f(x) = \log_{e,2}(x^n + \sqrt{x^{2n} + 1})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
20. * $f(x) = \ln(\ln x (\ln \ln x - 1))$

$f(x) = (2x + 1 - 2)g(x) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}) + (2-2)g(x) = \text{convexe}$
 \Rightarrow convexe

Dérivation : calculs, convexité.

1. Inégalités à prouver :

- * $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ et $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
- * $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
- * $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, 2x < \sin(2x) + \tan(x)$
- * $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) > x + \frac{x^3}{3}$.
- * $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \frac{\ln(x)}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2. Montrer que les applications suivantes sont de classe C^∞ :

$$\phi = \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right) \text{ et } \psi = \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right)$$

3. Etudier les suites définies par les relations de récurrences suivantes, sur les intervalles intéressants (à préciser)

- (a) $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, v_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$
- (b) $u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}, v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$
- (c) $u_{n+1} = \cos(u_n), v_{n+1} = (1 - v_n)^2$
- (d) $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n^2 - 1}, v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n}$
- (e) $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1 - u_n}}$

4. La somme, le produit, la composée de deux fonctions convexes sont-ils convexes ?

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i \in [1..n]}$ une famille de réels strictement positifs. Montrer que l'on a :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

6. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une application convexe. Montrer que :

- (a) Si f tend vers 0 en $+\infty$, alors f est positive.
- (b) Si f est croissante non constante, alors f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- (c) Si f est majorée alors f est constants.

7. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ dérivable sur $]0, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$. Montrer que f' s'annule sur $]0, 1[$

8. Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe un point M de la courbe représentative de f , autre que l'origine, tel que la tangente en M à la courbe passe par l'origine

9. Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f'' s'annule.

10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{i \in [1..n]}$ et $(y_i)_{i \in [1..n]}$ deux familles de réels strictement positifs. Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer¹ l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

En déduire l'inégalité de Minkowski, avec $r > 1$ un réel donné :

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

¹On utilisera la convexité de $x \rightarrow x^p$.

Intégration sur un segment.

Pour cette feuille, a et b désignent deux réels vérifiant $a < b$.

1. Étudier¹ la limite des suites de terme général :

(a) $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx$

(b) $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (\arcsin(x))^n dx.$

(c) $I_n = \int_0^n \frac{\sin(nx)}{n^2+x^4} dx.$

(d) $I_n = \int_0^{n^2} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^4} dx.$

2. Calculer² les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{1+t^4} dt.$

(b) $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^1 x^3 \sqrt{1+a^3 x^3} dx.$

3. Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $|\int_a^b f| = \int_a^b |f|$. Montrer³ que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

4. Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. On considère la fonction définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Montrer que F est k -lipschitzienne.

5. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Étudier⁴ la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^1 f(\frac{x}{n}) dx.$

6. On considère la suite I définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$

(a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n.$

(b) Trouver une relation de récurrence simple entre I_n et I_{n+1} pour $n \in \mathbb{N}$.

(c) On considère maintenant la suite S définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$

Exprimer la suite S en fonction de I .

(d) En déduire la convergence de la suite S et sa limite.

7. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Calculer⁵ la limite de la suite de terme général $I_n = n \int_0^1 x^n f(x) dx.$

8. On considère une suite (f_n) de fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n^4 = 0.$ Montrer⁶ que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n = 0$

9. Soit $f \in D^1([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $|f'|$ est majorée sur $[a, b]$ par M et que $f(a) = f(b) = 0.$ Montrer que l'on a $|\int_a^b f| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$

10. Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} [f(\frac{2k+1}{2n}) - f(\frac{k}{n})] = \frac{1}{2}[f(1) - f(0)].$

¹ Pour la 2ème, majorer grossièrement arcsin suffit, pour la dernière, on pourra découper l'intégrale en deux en s'aidant de l'intégrale précédente

² pour la première, majorer l'intégrande par une quantité ne dépendant que de x et étudier la limite; pour la deuxième, encadrer $\sqrt{1+a^3 x^3}$ par une quantité ne dépendant pas de x et calculer les intégrales ainsi obtenues

³ on pourra s'intéresser au signe de $\int_a^b f$ et traiter les deux cas

⁴ on pourra comparer l'intégrale et $\int_0^1 f(0) dx$

⁵ on peut essayer d'intuiter la limite en regardant des exemples précis puis étudier la différence entre la suite et la limite que l'on aura écrite comme une intégrale(cf ex 5)

⁶ on pourra d'abord montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n^2 = 0.$

3b) écrire f avec f et J ($J_a f$)

Intégration-Dérivation-DL.

4.2 ✓ 1. Un peu de changement de variable :

- 4 ✓ (a) Soit $f \in C^0([-a, a], \mathbb{R})$ avec $a > 0$. Par changement de variable, retrouver les propriétés géométriques suivantes :
- Si f est paire, montrer que $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.
 - Si f est impaire, montrer que $\int_{-a}^a f = 0$.
- 4 ✓ (b) Soit $a > 0$, Calculer $\int_0^x \frac{1}{a^2+u^2} du$ pour tout $x > 0$. (on se rappellera qu'on sait intégrer $\frac{1}{1+x^2}$)
- 2 ✓ (c) Pour $a < b$, calculer $\int_a^b (t-a)^3(b-t)^2 dt$.
- 2 ✓ (d) Trouver une primitive de $x \rightarrow \frac{ch(x)}{sh^4(x)}$ grâce au changement de variable $u = sh(x)$. (en indiquant les intervalles considérés)
- 2 ✓ (e) i. Pour une intégrale de la forme $\int_a^b f(x^n) \frac{dx}{x}$, on remarque que le changement de variable $u = x^n$ est intéressant.
ii. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^n)} dx$ pour $n \geq 1$.
- 2 ✓ (f) On se rappellera les techniques permettant d'exprimer $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$ et les primitives de $\frac{1}{\sin(x)}$ et $\frac{1}{\cos(x)}$ qu'on peut alors trouver par le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$.
- 4.2 ✓ (g) Calculer une primitive de $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$ (on pourra utiliser le changement de variable $x^2 = \cos(u)$).

3.4 ✓ 2. Intégration par parties et/ou primitives.

- 3 ✓ (a) Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$
- 3 ✓ (b) Calculer $\int_0^x \arctan(u) du$ pour tout $x > 0$.
- 3 ✓ (c) (lemme de Lebesgue) Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(nt) f(t) dt = 0$. (on peut essayer de généraliser à f continue par morceaux (ou simplement continue)).
- 3 ✓ (d) Calculer une primitive de $f(x) = (3x^2 + 5x - 12)\cos(3x)$
- 3 ✓ (e) Calculer une primitive de $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}$.
- 3 ✓ (f) Calculer une primitive de $f(x) = \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}$.
- 3-4 ✓ (g) Trouver une primitive de $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ en intégrant par partie. On pourra essayer de généraliser à $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ par récurrence.

5-6 3. Exercices généraux. $\int \frac{1}{\cos(x)}$

- 5 ✓ (a) Soit $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$, Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}$
- 6 ✓ (b) Soit $a < b$ deux réels. Prouver qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :
 $\forall f \in C^1([a, b], \mathbb{R}), f(a) = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(t) dt \leq C \int_a^b (f'(t))^2 dt$.
- 5 ✓ (c) Calculer $I = \int_a^b \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx$ et $J = \int_a^b \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx$. (on suppose que $[a, b]$ ne contient pas d'élément congru à $-\frac{\pi}{4}$ modulo π)

5 \ (d) Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. On suppose que f'' est bornée sur \mathbb{R} . Montrer¹ que l'on a :
 $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2\|f''\|_\infty} f(x)$.

5 \ (e) Trouver² l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} telles que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2$.

5 \ (f) Égalité de Taylor-Lagrange : soit f de classe C^n sur $[a, b]$ et de classe D^{n+1} sur $]a, b[$ avec $n \geq 1$. Montrer³ qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

6 \ (g) Trouver les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)dt = f^2(x)$. *on a : $f \in C^1$*

4. Compléments.

\ (a) Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que l'on a : $\forall (\alpha, \beta) \in [a, b]^2, \int_\alpha^\beta f = 0$.
 Prouver que l'on a $f = 0$.

\ (b) Soit $(f, g) \in C^0([0, 1], \mathbb{R})^2$. On suppose que l'on a $fg \geq 1$. Prouver⁴ que l'on a : $\int_0^1 f \int_0^1 g \geq 1$. Traiter les cas d'égalités.

\ (c) Soit $(f, g) \in C_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})^2$. Montrer⁵ que l'on a : $(\int_a^b (f+g)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b f^2)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b g^2)^{\frac{1}{2}}$.

\ (d) Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer⁶ que l'on a : $\|f\|_\infty \leq \int_a^b |f'| + \frac{1}{b-a} \int_a^b |f|$.

\ (e) Calculer⁷ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

\ (f) Calculer⁸ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

\ (g) Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0 et que $f(0) = 0$. Calculer⁹
 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{1}{n+kp}\right)$

\ (h) Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. On veut montrer que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f|^n\right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty$

i. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $|f(c)| = \|f\|_\infty$

ii. soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage $[\alpha, \beta]$ de f sur lequel on a $|f| \geq \|f\|_\infty - \epsilon$.

iii. En déduire que la suite est minorée par la suite de terme général $(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} (\|f\|_\infty - \epsilon)$.

iv. Obtenir une majoration de la suite du même genre et conclure par le théorème des gendarmes.

1. On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 2 et obtenir un polynôme du second degré en h (avec $f(x+h) - f(x) - \dots$)

2. on pourra prouver qu'une solution est forcément de classe C^∞ et qu'elle vérifie une équation différentielle simple à résoudre

3. on pourra utiliser le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \lambda$ avec λ à déterminer

tel que $g(a) = g(b)$

4. Prouver que f et g ont un signe constant et donc qu'on se ramène à f et g positives ; penser ensuite à un exercice déjà vu...

5. on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz à $\int_a^b fg$ et prouver l'inégalité entre les carrés des termes

6. Prouver l'existence de $(c, d) \in [a, b]^2$ tel que $|f(c)|$ réalise le minimum de $|f|$ et $|f(d)|$ réalise le maximum. Écrire alors $|f(d)| \leq |f(d) - f(c)| + |f(c)|$ et conclure!

7. on pourra majorer et minorer les termes de la suite par les termes d'une suite de Riemann convergente vers $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

8. on considérera la suite $v_n = \ln(u_n)$ avec u la suite à étudier. On se ramènera alors à une somme de Riemann pour v , le logarithme d'un produit étant une somme de logarithme

9. Montrer que la limite est la même que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+kp} f'(0)$

Développements limités.

- ✓ 1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 de $e^x - 1 - \sin(x)$ en 0
- ✓ 2. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de $\tan(x)$ en l'écrivant comme $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ en 0, puis une autre fois en utilisant la formule de Taylor-Young.
- ✓ 3. La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ admet-elle un DL d'ordre $n \geq 1$ en 0?
- ✓ 4. Calculer le DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 6 en 0 grâce à la formule de Taylor-Young.
- ✓ 5. Quelques DL :
 - (a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0.
 - (b) $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0.
 - (c) $\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$ à l'ordre 4 en 0.
 - (d) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ à l'ordre 3 en 0.
- ✓ 6. Trouver les limites suivantes :
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(x)} - \sin(x) - 1}{x \cos(x) - \ln(1+x) - \frac{x^2}{2}}$
 - (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{++})^2$.
 - (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{++})^2$.
- ✓ 7. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$.
- ✓ 8. Calculer le DL en 0 à l'ordre 4 de $(\cos(x))^{1+\sin(x)}$.
- ✓ 9. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $\frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))}$.
- ✓ 10. Étudier le prolongement en 0 de la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)}$.
11. Déterminer les limites suivantes :
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1}$
12. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \rightarrow |x|^n$ admet-elle un développement limité d'ordre n en 0?