

Suites réelles

TODO : Manque des exercices sur les suites de Cauchy, et sur la vitesse de convergence.

1. Traduire, en terme de quantificateurs, les phrases suivantes :
 - (1) la suite u (i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) ne converge **pas** vers $l \in \mathbb{R}$,
 - (2) la suite u ne diverge pas vers $+\infty$,
 - (3) la suite u diverge.
2. Montrer que la suite $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Trouver une suite divergente mais qui ne tende pas vers $\pm\infty$, puis une suite non bornée, à termes positifs, qui ne diverge pas vers $+\infty$.
4. Étudier les suites suivantes (sont-elles bien définies ? Premiers termes, limite éventuelle, comportement asymptotique etc) :

$$(1) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^2 + 3n - 4}{4n^2 + 5},$$

$$(3) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^4 + 7n}{5n^4 + \cos(n^2) - \frac{1}{n}},$$

$$(2) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(n^2)}{n},$$

$$(4) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \text{ avec } (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,$$

5. Le produit de deux suites minorées est-il minoré ?
6. Montrer qu'une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
7. Soit u une suite bornée et v une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer que $u + v$ tend aussi vers $+\infty$.
8. Soit u une suite convergente et v une suite divergente. Montrer que $u + v$ diverge. Que peut-on dire de la suite produit $((u.v)_n \stackrel{\text{def}}{=} u_n.v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, noté uv) ?
9. Soient u et v deux suites convergeant respectivement vers l et l' . On considère les suites w_i et ws définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_i \stackrel{\text{def}}{=} \min\{u_n, v_n\}, ws_n \stackrel{\text{def}}{=} \max\{u_n, v_n\}$. Montrer que les suites w_i et ws sont convergeantes, et calculer leurs limites.
10. On considère une suite réelle u dont tous les termes sont des entiers relatifs (i.e. $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$). Montrer qu'elle converge *si et seulement si*¹ elle est constante à partir d'un certain rang.
11. Prouver² la convergence des suites de terme général $u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$, et $v_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. *Si et seulement si* sera souvent abrégé **ssi**.

2. Pour la deuxième, la formule $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ valable pour $n \in \mathbb{N}$ pourrait aider.

12. Soit u une suite bornée vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$. On définit alors la suite v par la relation $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \stackrel{\text{def}}{=} u_{n+1} - u_n$. Montrer³ que la suite v converge, et calculer sa limite.
13. On considère deux suites u, v définies par leur premier terme $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer⁴ que ces deux suites convergent, et qu'elles ont la même limite (qui ne dépend que de u_0, v_0). Pouvez-vous donner le nom usuel⁵ donné à cette limite ?

14. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que les trois suites $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer qu'alors la suite u converge.
15. Soit u une suite réelle croissante. Si on suppose que u admet une sous-suite extraite convergente, prouver alors que u converge.
16. On considère une suite réelle u et la suite v des moyennes arithmétiques des premiers termes de u : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

(1) On veut montrer le résultat suivant, connu sous le nom de **théorème de Cesàro** : si u converge, alors v converge et a la même limite. Vous pouvez chercher à montrer ce résultat directement, ou bien suivre les questions intermédiaires suivantes :

- (i) Montrer que l'on peut se restreindre à montrer le théorème dans le cas où u converge vers 0.
- (ii) Désormais, on suppose donc que u converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On a donc l'existence (d'après la définition) d'un rang N entier à partir duquel $|u_n| \leq \varepsilon$. Décomposer la somme en deux, avant et après N , et conclure en utilisant le fait que la première partie tend vers 0 pour $n \rightarrow +\infty$.

(2) Qu'en est-t-il de la réciproque ? Et si on ajoute l'hypothèse : u est croissante ?

17. Soit u une suite réelle, et $l \in \mathbb{R}$, tels que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$. Montrer⁶ que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

18. Étudier⁷ la suite de terme général $u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

19. Trouver un équivalent simple des suites de terme général :

3. On pourra prouver que la suite v est monotone et bornée, et raisonner par l'absurde en montrant que la limite est nulle.

4. On pourra essayer de prouver que, à partir d'un certain rang, l'une est croissante, l'autre décroissante, et l'une est toujours supérieure à l'autre.

5. Elle est généralement appelée moyenne arithmetico-géométrique de u_0 et v_0 .

6. On pourrait penser au théorème de Cesàro.

7. On pourra penser à se concentrer sur les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u_n &= \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}, & (5) \quad u_n &= \frac{\ln n + n!}{n^2 + (n+1)!}, \\
 (2) \quad u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, & (6) \quad u_n &= \frac{\sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}}}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}} - \\
 (3) \quad u_n &= \frac{e^n + n!}{n+1}, & (7) \quad u_n &= e^{n^2 + n! + \frac{1}{n}}, \\
 (4) \quad u_n &= \frac{e^n + e^{-n} + n}{\sqrt{n^2 + n - n}},
 \end{aligned}$$

20. En admettant le résultat⁸ suivant : si u converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $e^u \stackrel{\text{def}}{=} (e^{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^l , étudier les suites suivantes :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \\
 (2) \quad u_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \\
 (3) \quad u_n &= \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}.
 \end{aligned}$$

21. Trouver un équivalent du terme général de la suite u et en déduire le comportement (asymptotique) de u dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u_n &= \sin(\tan(\ln(n+1) - \ln(n))), \\
 (2) \quad u_n &= \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{\ln(n+1) - \ln(n)}, \\
 (3) \quad u_n &= \frac{e^{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1}{1 - \cos(e^{-n})} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right).
 \end{aligned}$$

22. Soit u une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

- (1) Montrer que u diverge vers $+\infty$,
- (2) On considère la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$. Montrer que v est croissante.
- (3) En majorant, pour $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n$, montrer que v est majorée. En déduire la convergence de v , dont on notera la limite α ,
- (4) Montrer que l'on a : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$,
- (5) En déduire que l'on a : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{2^n \alpha}$.

8. Qui vient de la continuité de l'exponentielle.