

## Nombres réels

1. Montrer les inégalités classiques suivantes :

- (1)  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , (4)  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ ,  
 (2)  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$ , (5)  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ ,  
 (3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 1, \exists n \in \mathbb{N}, a^n \geq x$ , (6)  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ,

2. Majoration et minoration d'ensembles :

- (1) Encadrer, pour  $x \in [0, 3]$ , la valeur de l'expression  $\frac{x-1}{e^x+1}$ ,  
 (2) Montrer que  $\left\{ \frac{\sin(x) - 2\cos(x)}{e^{\sin x}} \right\}$  est un ensemble borné,  
 (3) Montrer<sup>1</sup> que  $\left\{ \sqrt{n^3 + n + 2} - \sqrt{n^3 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}$  est un ensemble borné,  
 3. Déterminer le plus grand (resp. petit) élément, ainsi que la borne supérieure (resp. inférieure) des ensembles  $E$  suivants, lorsque ces notions existent :

- (1)  $E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ,  
 (2)  $E = A + B$  avec  $A$  et  $B$  deux segments de  $\mathbb{R}$ , où on rappelle que  $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{x+y, (x, y) \in A \times B\}$ ,  
 (3)  $E = A - B$  avec  $A$  et  $B$  deux segments de  $\mathbb{R}$ , où on rappelle que  $A - B \stackrel{\text{def}}{=} \{x-y, (x, y) \in A \times B\}$ ,  
 (4) Que peut-on dire si l'on considère que  $A$  et  $B$  sont des intervalles ouverts, non vides et bornés, de  $\mathbb{R}$ ? Ou bien deux parties bornées non vides de  $\mathbb{R}$ ?  
 (5)  $E = A \cup B$ , avec  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ ,  
 (6)  $E = \left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$  avec deux paramètres  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .  
 4. Soit  $B$  une partie bornée non vide de  $\mathbb{R}$ , et  $A \subset B$  un ensemble non vide. Montrer que l'on a  $\sup A \leq \sup B$ .  
 5. Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $\sqrt{2-2x} + \sqrt{3+x} = 1$ .  
 6. Soit  $A$  une partie majorée, non vide, de  $\mathbb{R}$ , avec  $\sup A > 0$ . Montrer que  $A$  contient un élément strictement positif.  
 7. Déterminer l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|$  (appelées *isométries*).

1. On pourra se souvenir de l'utilisation des "quantités conjuguées".

2. On pourra montrer que, si  $A = [a, b]$  et  $B = [c, d]$  deux segments, alors  $A + B = [a+c, b+d]$ .

8. Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ , avec  $a \geq b$ . Simplifier l'expression suivante :  $\sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$ .
9. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  bornées<sup>3</sup>. Montrer alors que l'on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |(f + g)(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

10. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $(x_i)_{i \in [1, \dots, n]}$   $n$  réels strictement positifs. Montrer que l'on a l'inégalité suivante :

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n^2.$$

11. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , à partir d'ici  $E$  désignera la fonction **partie entière**. Montrer que l'on a :

- (1)  $a \leq b \Rightarrow E(a) \leq E(b)$  (croissance de  $E$ ),
- (2)  $E(a) + E(b) \leq E(a + b) \leq E(a) + E(b) + 1$ .

12. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que l'on a :  $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$ .

13. (1) Montrer que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ,

- (2) Calculer la partie entière de  $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

14. (1) Soit  $X$  une partie dense de  $\mathbb{R}$ , montrer que  $X$  n'est pas bornée.
- (2) Montrer que  $X$  privée d'un nombre fini d'éléments est toujours dense dans  $\mathbb{R}$ . Est-ce toujours vrai avec un nombre infini<sup>4</sup> d'éléments ?
- (3) Montrer<sup>5</sup> désormais que  $X$  privée d'une partie dénombrable est toujours dense dans  $\mathbb{R}$ .
- (4) On considère deux parties  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $X \subset Y$ . On suppose que  $X$  est finie, et *dense dans*<sup>6</sup>  $Y$ . Montrer que  $Y = X$ .

3. On rappelle que  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  est bornée lorsque :  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$ .

4. Cela dépend en fait de la "notion" d'infinité que l'on utilise, voir question suivante.

5. On pourra par exemple montrer que n'importe quel intervalle réel  $]a, b[$  est non dénombrable, aussi petit soit-il...

6. On conserve la même définition que la densité dans  $\mathbb{R}$ , à l'aide de suites et de limites.