

Suites réelles : compléments

1. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$, on suppose que l'on a $0 \leq u \leq 1$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$, ce raccourcis est très fréquent), et $0 \leq v \leq 1$, et que uv converge vers 1. Que peut-on dire¹ de u et de v ?
2. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$, et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que l'on a $u \leq a$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a$), et $v \leq b$, et que $u + v$ converge vers $a + b$. Montrer² que les suites u et v convergent et déterminer leur limite.
3. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$, on suppose que $u^2 + uv + v^2$ converge vers 0. Montrer³ que u et v convergent vers 0.
4. Déterminer la limite des suites définies par les termes généraux suivants :

$$(1) \quad u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k,$$

$$(4) \quad u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}},$$

$$(2) \quad u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$(5) \quad u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

$$(3) \quad u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{n^2},$$

5. Soit u une suite réelle bornée. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{u_p, p \geq n\}$ et $w_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{u_p, p \geq n\}$.
 - (1) Montrer que v et w convergent, et comparer leur limite,
 - (2) Déterminer cette limite dans le cas où u converge.
6. Soit u une suite réelle, strictement positive. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ (resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$).
 - (1) Montrer que si $l \in [0, 1)$, alors u converge vers 0,
 - (2) Montrer que si $l > 1$, alors u diverge vers $+\infty$,
 - (3) Montrer que l'on ne peut conclure si $l = 1$ (point d'indétermination).
7. On considère la suite harmonique S définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 - (1) Montrer que S admet une limite,
 - (2) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$, et en déduire la limite de S ,
 - (3) On considère maintenant une suite u vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_{n+1} - u_n) = 1$. Montrer que u diverge vers $+\infty$.

1. On pourra montrer, en encadrant u et v et avec un théorème d'encadrement – dit des gendarmes, que u et v tendent vers une limite commune que l'on déterminera.

2. De la même manière, on encadrera les suites pour utiliser le théorème des gendarmes afin de prouver que les deux suites convergent respectivement vers a et b .

3. On pourra d'abord montrer que $u + v$ converge vers 0 en majorant $(u + v)^2$ d'une certaine façon.