

## Exercices, partie 1 du cours de maths en première année (MA 101, 2014).

## Nombres réels

1. Montrer les inégalités classiques suivantes :

- (1)  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , (4)  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ ,  
 (2)  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$ , (5)  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ ,  
 (3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 1, \exists n \in \mathbb{N}, a^n \geq x$ , (6)  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ,

2. Majoration et minoration d'ensembles :

- (1) Encadrer, pour  $x \in [0, 3]$ , la valeur de l'expression  $\frac{x-1}{e^x+1}$ ,  
 (2) Montrer que  $\left\{ \frac{\sin(x) - 2 \cos(x)}{e^{\sin x}} \right\}$  est un ensemble borné,  
 (3) Montrer<sup>1</sup> que  $\left\{ \sqrt{n^3 + n + 2} - \sqrt{n^3 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}$  est un ensemble borné,

3. Déterminer le plus grand (resp. petit) élément, ainsi que la borne supérieure (resp. inférieure) des ensembles  $E$  suivants, lorsque ces notions existent :

- (1)  $E = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ,  
 (2)  $E = A + B$  avec<sup>2</sup>  $A$  et  $B$  deux segments de  $\mathbb{R}$ , où on rappelle que  $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{x+y, (x, y) \in A \times B\}$ ,  
 (3)  $E = A - B$  avec  $A$  et  $B$  deux segments de  $\mathbb{R}$ , où on rappelle que  $A - B \stackrel{\text{def}}{=} \{x-y, (x, y) \in A \times B\}$ ,  
 (4) Que peut-on dire si l'on considère que  $A$  et  $B$  sont des intervalles ouverts, non vides et bornés, de  $\mathbb{R}$ ? Ou bien deux parties bornées non vides de  $\mathbb{R}$ ?  
 (5)  $E = A \cup B$ , avec  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ ,  
 (6)  $E = \left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$  avec deux paramètres  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .

4. Soit  $B$  une partie bornée non vide de  $\mathbb{R}$ , et  $A \subset B$  un ensemble non vide. Montrer que l'on a  $\sup A \leq \sup B$ .

5. Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $\sqrt{2-2x} + \sqrt{3+x} = 1$ .

6. Soit  $A$  une partie majorée, non vide, de  $\mathbb{R}$ , avec  $\sup A > 0$ . Montrer que  $A$  contient un élément strictement positif.

7. Déterminer l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|$  (appelées *isométries*).

1. On pourra se souvenir de l'utilisation des "quantités conjuguées".

2. On pourra montrer que, si  $A = [a, b]$  et  $B = [c, d]$  deux segments, alors  $A + B = [a+c, b+d]$ .

8. Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ , avec  $a \geq b$ . Simplifier l'expression suivante :  $\sqrt{a + 2\sqrt{a - b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - b}\sqrt{b}}$ .

9. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  bornées<sup>3</sup>. Montrer alors que l'on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |(f + g)(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

10. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $(x_i)_{i \in [1, \dots, n]}$   $n$  réels strictement positifs. Montrer que l'on a l'inégalité suivante :

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n^2.$$

11. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , à partir d'ici  $E$  désignera la fonction **partie entière**. Montrer que l'on a :

- (1)  $a \leq b \Rightarrow E(a) \leq E(b)$  (croissance de  $E$ ),
- (2)  $E(a) + E(b) \leq E(a + b) \leq E(a) + E(b) + 1$ .

12. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que l'on a :  $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$ .

13. (1) Montrer que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ,

(2) Calculer la partie entière de  $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

14. (1) Soit  $X$  une partie dense de  $\mathbb{R}$ , montrer que  $X$  n'est pas bornée.

(2) Montrer que  $X$  privée d'un nombre fini d'éléments est toujours dense dans  $\mathbb{R}$ . Est-ce toujours vrai avec un nombre infini<sup>4</sup> d'éléments ?

(3) Montrer<sup>5</sup> désormais que  $X$  privée d'une partie dénombrable est toujours dense dans  $\mathbb{R}$ .

(4) On considère deux parties  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $X \subset Y$ . On suppose que  $X$  est finie, et *dense dans*<sup>6</sup>  $Y$ . Montrer que  $Y = X$ .

3. On rappelle que  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  est bornée lorsque :  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$ .

4. Cela dépend en fait de la "notion" d'infini que l'on utilise, voir question suivante.

5. On pourra par exemple montrer que n'importe quel intervalle réel  $]a, b[$  est non dénombrable, aussi petit soit-il...

6. On conserve la même définition que la densité dans  $\mathbb{R}$ , à l'aide de suites et de limites.

## Nombres complexes et trigonométrie

- Simplifier les expressions suivantes :  $\tan(3\pi + \theta)$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ , où l'on suppose que  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que ces expressions aient un sens.
- Trouver<sup>7</sup> une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur  $z \in \mathbb{C}$  pour que l'on ait :  $|z + i| = |z - i|$ .
- Calculer les intégrales suivantes :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) dx$  et  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x) dx$ .
- Résoudre (dans  $\mathbb{C}$ ) les équations suivantes :
  - $z^2 + (1 - i)z - 1 + \frac{1}{4} = 0$ ,
  - $z^2 + (2 - 3i)z - 6i = 0$ ,
  - $3z^2 + (1 + i)z + 2 = 0$ .
- Soit  $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Prouver l'équivalence suivante :  $|u| = 1 \Leftrightarrow \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R}$ .
- Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivantes (*i.e.* trouver le module et **un** argument) :  $1 + i$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ,  $1 + e^{i\theta}$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , et  $e^{ia} + e^{ib}$  pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .
- Que vaut le produit de toutes les racines  $n^{\text{ème}}$  de l'unité (pour  $n$  entier naturel supérieur à 2) ?
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :
  - $\cos(x) + \sin(x) = 0$ ,
  - $\sin(4x) - \sqrt{3}\sin(3x) + \sin(2x) = 0$ .
- Déterminer  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ , en utilisant une méthode trigonométrique puis algébrique<sup>8</sup>.
- Soit  $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n |\xi^k - 1|$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (en  $z$ ) suivante :  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ . On pourra introduire la variable  $Z := z + \frac{1}{z}$ . Montrer ensuite que les solutions sont parmi les racines 5<sup>ème</sup> de l'unité (l'ensemble  $\mathbb{U}_5$ ), et en déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (en  $z$ ) suivante :  $(z + 1)^6 + (z - 1)^6 = 0$ .
- On considère la suite récurrente définie par la donnée de  $u_0$  et  $u_1$ , deux nombres complexes quelconques, et par l'équation de récurrence suivante :  $u_{n+2} - u_{n+1} = a(u_{n+1} - u_n)$ , pour un  $a \in \mathbb{C}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donner une condition nécessaire **et** suffisante sur ce paramètre  $a$  pour que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit *périodique*<sup>9</sup>.

7. Penser à passer au carré pour utiliser la formule  $|z|^2 = z\bar{z}$ .

8. Pour la seconde, si  $z = e^{i\frac{\pi}{8}}$  alors  $z^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$  et on connaît une méthode pour calculer **une** racine (carrée) d'un complexe en forme algébrique.

9. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite *périodique* s'il existe un entier  $T \geq 1$ , appelé période, tel que  $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+T} = u_k$

14. Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ .
- (1) Prouver l'égalité suivante :  $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$  (c'est l'identité du parallélogramme). Illustrer la situation afin de justifier cette appellation.
  - (2) En déduire :  $|z| + |z'| = \left|a + \frac{z + z'}{2}\right| + \left|a - \frac{z + z'}{2}\right|$  avec  $a$  **une** racine carrée de  $zz'$ .
15. Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation suivante :  $z^4 - 4 \cos(a) \cos(b)z^3 + 2(1 + \cos(2a) + \cos(2b))z^2 - 4 \cos(a) \cos(b)z + 1 = 0$ .
16. Soit  $a$  un complexe de module 1 (*i.e.*  $a \in \mathbb{U}$ ) et  $z_1, \dots, z_n$  les solutions complexes de l'équation  $z^n = a$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  (*i.e.* les  $n$  racines  $n^{\text{ème}}$  de  $a$ ). Montrer que les points du plan complexe d'affixes  $(1 + z_1)^n, \dots, (1 + z_n)^n$  sont alignés dans le plan euclidien<sup>10</sup>.
- 

---

10. On pourra essayer de voir si, par hasard, ces points ne seraient pas sur une droite qui passe par l'origine. Cela pourrait se caractériser à l'aide des arguments.

## Suites réelles

**TODO** : Manque des exercices sur les suites de Cauchy, et sur la vitesse de convergence.

1. Traduire, en terme de quantificateurs, les phrases suivantes :

- (1) la suite  $u$  (i.e.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) ne converge **pas** vers  $l \in \mathbb{R}$ ,
- (2) la suite  $u$  ne diverge pas vers  $+\infty$ ,
- (3) la suite  $u$  diverge.

2. Montrer que la suite  $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .

3. Trouver une suite divergente mais qui ne tende pas vers  $\pm\infty$ , puis une suite non bornée, à termes positifs, qui ne diverge pas vers  $+\infty$ .

4. Étudier les suites suivantes (sont-elles bien définies ? Premiers termes, limite éventuelle, comportement asymptotique etc) :

$$(1) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^2 + 3n - 4}{4n^2 + 5},$$

$$(3) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^4 + 7n}{5n^4 + \cos(n^2) - \frac{1}{n}},$$

$$(2) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(n^2)}{n},$$

$$(4) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \text{ avec } (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,$$

5. Le produit de deux suites minorées est-il minoré ?

6. Montrer qu'une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.

7. Soit  $u$  une suite bornée et  $v$  une suite qui tend vers  $+\infty$ . Montrer que  $u + v$  tend aussi vers  $+\infty$ .

8. Soit  $u$  une suite convergente et  $v$  une suite divergente. Montrer que  $u + v$  diverge. Que peut-on dire de la suite produit  $((u.v)_n \stackrel{\text{def}}{=} u_n.v_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , noté  $uv$ ) ?

9. Soient  $u$  et  $v$  deux suites convergeant respectivement vers  $l$  et  $l'$ . On considère les suites  $w_i$  et  $w_s$  définies par :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{i_n} \stackrel{\text{def}}{=} \min\{u_n, v_n\}, w_{s_n} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{u_n, v_n\}$ . Montrer que les suites  $w_i$  et  $w_s$  sont convergeantes, et calculer leurs limites.

10. On considère une suite réelle  $u$  dont tous les termes sont des entiers relatifs (i.e.  $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ). Montrer qu'elle converge *si et seulement si*<sup>11</sup> elle est constante à partir d'un certain rang.

11. Prouver<sup>12</sup> la convergence des suites de terme général  $u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$ , et  $v_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

12. Soit  $u$  une suite bornée vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$ . On définit alors la suite  $v$  par la relation  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \stackrel{\text{def}}{=} u_{n+1} - u_n$ . Montrer<sup>13</sup> que la suite  $v$  converge, et calculer sa limite.

11. *Si et seulement si* sera souvent abrégé **ssi** .

12. Pour la deuxième, la formule  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  valable pour  $n \in \mathbb{N}$  pourrait aider.

13. On pourra prouver que la suite  $v$  est monotone et bornée, et raisonner par l'absurde en montrant que la limite est nulle.

13. On considère deux suites  $u, v$  définies par leur premier terme  $u_0 > 0$  et  $v_0 > 0$ , et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer<sup>14</sup> que ces deux suites convergent, et qu'elles ont la même limite (qui ne dépend que de  $u_0, v_0$ ). Pouvez-vous donner le nom usuel<sup>15</sup> donné à cette limite ?

14. Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite réelle. On suppose que les trois suites  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent. Montrer qu'alors la suite  $u$  converge.
15. Soit  $u$  une suite réelle croissante. Si on suppose que  $u$  admet une sous-suite extraite convergente, prouver alors que  $u$  converge.
16. On considère une suite réelle  $u$  et la suite  $v$  des moyennes arithmétiques des premiers termes de  $u$  :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ .

(1) On veut montrer le résultat suivant, connu sous le nom de **théorème de Cesàro** : si  $u$  converge, alors  $v$  converge et a la même limite. Vous pouvez chercher à montrer ce résultat directement, ou bien suivre les questions intermédiaires suivantes :

- (i) Montrer que l'on peut se restreindre à montrer le théorème dans le cas où  $u$  converge vers 0.
- (ii) Désormais, on suppose donc que  $u$  converge vers 0. Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. On a donc l'existence (d'après la définition) d'un rang  $N$  entier à partir duquel  $|u_n| \leq \varepsilon$ . Décomposer la somme en deux, avant et après  $N$ , et conclure en utilisant le fait que la première partie tend vers 0 pour  $n \rightarrow +\infty$ .

(2) Qu'en est-t-il de la réciproque ? Et si on ajoute l'hypothèse :  $u$  est croissante ?

17. Soit  $u$  une suite réelle, et  $l \in \mathbb{R}$ , tels que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$ . Montrer<sup>16</sup> que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = l.$$

18. Étudier<sup>17</sup> la suite de terme général  $u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .

19. Trouver un équivalent simple des suites de terme général :

$$(1) u_n = \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}},$$

$$(5) u_n = \frac{\ln n + n!}{n^2 + (n+1)!},$$

$$(2) u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

$$(6) u_n = \sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}.$$

$$(3) u_n = \frac{e^n + n!}{n+1},$$

$$(7) u_n = e^{n^2 + n! + \frac{1}{n}},$$

$$(4) u_n = \frac{e^n + e^{-n} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n},$$

---

14. On pourra essayer de prouver que, à partir d'un certain rang, l'une est croissante, l'autre décroissante, et l'une est toujours supérieure à l'autre.

15. Elle est généralement appelée moyenne arithmetico-géométrique de  $u_0$  et  $v_0$ .

16. On pourrait penser au théorème de Cesàro.

17. On pourra penser à se concentrer sur les deux suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

20. En admettant le résultat<sup>18</sup> suivant : si  $u$  converge vers  $l \in \mathbb{R}$ , alors  $e^u \stackrel{\text{def}}{=} (e^{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $e^l$ , étudier les suites suivantes :

$$(1) \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$(2) \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$(3) \quad u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

21. Trouver un équivalent du terme général de la suite  $u$  et en déduire le comportement (asymptotique) de  $u$  dans chacun des cas suivants :

$$(1) \quad u_n = \sin(\tan(\ln(n+1) - \ln(n))),$$

$$(2) \quad u_n = \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}}{\ln(n+1) - \ln(n)},$$

$$(3) \quad u_n = \frac{e^{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1}{1 - \cos(e^{-n})} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

22. Soit  $u$  une suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ .

(1) Montrer que  $u$  diverge vers  $+\infty$ ,

(2) On considère la suite  $v$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$ . Montrer que  $v$  est croissante.

(3) En majorant, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n$ , montrer que  $v$  est majorée. En déduire la convergence de  $v$ , dont on notera la limite  $\alpha$ ,

(4) Montrer que l'on a :  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ ,

(5) En déduire que l'on a :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{2^n \alpha}$ .

<sup>18</sup>. Qui vient de la continuité de l'exponentielle.

## Suites réelles : compléments

1. Soit  $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ , on suppose que l'on a  $0 \leq u \leq 1$  (i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$ , ce raccourcis est très fréquent), et  $0 \leq v \leq 1$ , et que  $uv$  converge vers 1. Que peut-on dire<sup>19</sup> de  $u$  et de  $v$  ?
2. Soit  $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ , et soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On suppose que l'on a  $u \leq a$  (i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a$ ), et  $v \leq b$ , et que  $u + v$  converge vers  $a + b$ . Montrer<sup>20</sup> que les suites  $u$  et  $v$  convergent et déterminer leur limite.
3. Soit  $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ , on suppose que  $u^2 + uv + v^2$  converge vers 0. Montrer<sup>21</sup> que  $u$  et  $v$  convergent vers 0.
4. Déterminer la limite des suites définies par les termes généraux suivants :

$$(1) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k,$$

$$(4) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}},$$

$$(2) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$(5) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

$$(3) u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{n^2},$$

5. Soit  $u$  une suite réelle bornée. On définit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{u_p, p \geq n\}$  et  $w_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{u_p, p \geq n\}$ .
  - (1) Montrer que  $v$  et  $w$  convergent, et comparer leur limite,
  - (2) Déterminer cette limite dans le cas où  $u$  converge.
6. Soit  $u$  une suite réelle, strictement positive. On suppose qu'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$  (resp.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ ).
  - (1) Montrer que si  $l \in [0, 1)$ , alors  $u$  converge vers 0,
  - (2) Montrer que si  $l > 1$ , alors  $u$  diverge vers  $+\infty$ ,
  - (3) Montrer que l'on ne peut pas conclure si  $l = 1$  (point d'indétermination).
7. On considère la suite harmonique  $S$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .
  - (1) Montrer que  $S$  admet une limite,
  - (2) Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ , et en déduire la limite de  $S$ ,
  - (3) On considère maintenant une suite  $u$  vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_{n+1} - u_n) = 1$ . Montrer que  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

---

19. On pourra montrer, en encadrant  $u$  et  $v$  et avec un théorème d'encadrement – dit des gendarmes, que  $u$  et  $v$  tendent vers une limite commune que l'on déterminera.

20. De la même manière, on encadrera les suites pour utiliser le théorème des gendarmes afin de prouver que les deux suites convergent respectivement vers  $a$  et  $b$ .

21. On pourra d'abord montrer que  $u + v$  converge vers 0 en majorant  $(u + v)^2$  d'une certaine façon.



## Fonctions usuelles

**TODO** : Il manque des exercices sur les graphiques, et les propriétés géométriques (asymptote, ...).

- Résoudre, sur l'ensemble approprié, l'inéquation :  $\ln|x+2| + \ln 3 \leq \ln|3x-4|$ .
- Montrer que les fonctions suivantes réalisent des bijections, sur les ensembles appropriés, et donner l'expression de leurs réciproques (en explicitant leurs domaines de définition) :

(1)  $f_1 : x \mapsto 3x - 5$ ,

(4)  $f_4 : x \mapsto \frac{1}{3x-2}$ ,

(2)  $f_2 : x \mapsto \sqrt{3} - x$ ,

(5)  $f_5 : x \mapsto \frac{3x+2}{2x-1}$ ,

(3)  $f_3 : x \mapsto x^2 - 1$  (sur  $\mathbb{R}_-$ ),

(6)  $f_6 : x \mapsto \ln(2e^x - 1)$ ,

- Reprendre l'exercice précédent, mais en étudiant la dérivabilité des fonctions et de leurs réciproques, puis en calculant ces dérivées. En bonus, on pourra essayer de chercher les points où les fonctions s'annulent et ceux où leur dérivée s'annule.
- Donner les ensembles de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

(1)  $f_1 : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ,

(3)  $f_3 : x \mapsto \ln(\cos(x))$ ,

(4)  $f_4 : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}}$ ,

(2)  $f_2 : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{-x^2 - x + 6}\right)$ ,

(5)  $f_5 : x \mapsto \sin(x)^{\cos(x)}$ ,

(6)  $f_6 : x \mapsto x^{x^x}$  (lu comme  $x^{(x^x)}$ ),

- Soient  $f$  et  $g$  définies par  $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  et  $g : x \mapsto \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ . Déterminer les ensembles de définition de ces fonctions. Établir le tableau de variation de  $f$ , et montrer que lorsque que cela a un sens, on a  $f(x) + g(x) = 0$ . Pouvez-vous donner le nom usuel de cette fonction  $f$  ?
- Préciser les valeurs (de  $x$ ) pour lesquelles les expressions suivantes ont un sens, et les simplifier tant que possible :

(1)  $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$ ,

(2)  $\ln_x(\ln_x(x^{x^x}))$  (où on rappelle que  $\ln_x$  est la fonction **logarithme en base  $x$** .)

- Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant bien sûr l'ensemble :

(1)  $f : x \mapsto \arccos(x-1)$ ,

(2)  $f : x \mapsto \arctan|x|$  (raccourcis syntaxique pour  $\arctan(|x|)$ , fréquemment employé),

(3)  $f : x \mapsto \operatorname{arcsinh}(\sqrt{x^2-1})$ ,

- Résoudre l'équation  $\sinh(x) = 3$ , **sans** utiliser de calculatrice ni la formule exprimant  $\operatorname{arcsinh}$  en terme de logarithme.

9. Trouver<sup>22</sup> la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ .
10. Résoudre<sup>23</sup> l'équation  $\sum_{k=0}^n \sinh(2 + kx)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
11. Résoudre le système suivant :
- $$\begin{cases} \operatorname{arcsinh}(x) &= 2 \operatorname{arcsinh}(y) \\ 2 \ln(x) &= 2 \ln(y) \end{cases}$$
12. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , résoudre l'équation (en  $x$ ) suivante :
- $$(\cosh(x) + \sinh(x))^{\operatorname{arcsinh}(x-a)} = (\cosh(x) - \sinh(x))^{\operatorname{arcsinh}(x-b)}.$$
13. Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , calculer les deux sommes suivantes :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cosh(kx)$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \sinh(kx)$ .
14. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , montrer que, si  $x = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)\right)$ , alors :  $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$ ,  
 $\tanh(x) = \sin(y)$  et  $\cosh(x) = \frac{1}{\cos(y)}$ .
15. Simplifier les expressions suivantes :
- (1)  $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ ,
  - (2)  $\arctan\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ,
  - (3)  $\arctan\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ .
16. Étudier les expressions suivantes (on cherchera une astuce) :
- (1)  $\arccos\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$ , pour  $t \in \mathbb{R}$ ,
  - (2)  $\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \arctan(x) - \arctan(y)$ , pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $xy \neq 1$ .
17. Résoudre les équations suivantes :
- (1)  $\tan(3 \arcsin(x)) = 1$ ,
  - (2)  $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{5}$ .
  - (3)  $\arctan\left(\frac{p}{q}\right) + \arctan\left(\frac{q-p}{q+p}\right) = \frac{\pi}{5}$  avec  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  vérifiant  $0 < p < q$ .
18. Calculer les sommes suivantes :
- (1)  $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$ ,
  - (2)  $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$ ,

---

22. On pourra écrire les puissances à l'aide d'exponentielles.

23. On pourra utiliser une technique assez similaire à celle utilisée pour calculer  $\sum_{k=0}^n \sin k\theta = 0$ .