

Nombres complexes et trigonométrie

1. Simplifier les expressions suivantes : $\tan(3\pi + \theta)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, où l'on suppose que $\theta \in \mathbb{R}$ tel que ces expressions aient un sens.
2. Trouver¹ une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur $z \in \mathbb{C}$ pour que l'on ait : $|z + i| = |z - i|$.

3. Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x) dx$.

4. Résoudre (dans \mathbb{C}) les équations suivantes :

$$(1) z^2 + (1 - i)z - 1 + \frac{1}{4} = 0,$$

$$(2) z^2 + (2 - 3i)z - 6i = 0,$$

$$(3) 3z^2 + (1 + i)z + 2 = 0.$$

5. Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence suivante : $|u| = 1 \Leftrightarrow \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R}$.

6. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivantes (*i.e.* trouver le module et **un** argument) : $1 + i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $1 + e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, et $e^{ia} + e^{ib}$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

7. Que vaut le produit de toutes les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité (pour n entier naturel supérieur à 2) ?

8. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(1) \cos(x) + \sin(x) = 0,$$

$$(2) \sin(4x) - \sqrt{3}\sin(3x) + \sin(2x) = 0.$$

9. Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, en utilisant une méthode trigonométrique puis algébrique².

10. Soit $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n |\xi^k - 1|$.

11. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (en z) suivante : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. On pourra introduire la variable $Z := z + \frac{1}{z}$. Montrer ensuite que les solutions sont parmi les racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité (l'ensemble \mathbb{U}_5), et en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. Penser à passer au carré pour utiliser la formule $|z|^2 = z\bar{z}$.

2. Pour la seconde, si $z = e^{i\frac{\pi}{8}}$ alors $z^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et on connaît une méthode pour calculer **une** racine (carrée) d'un complexe en forme algébrique.

12. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (en z) suivante : $(z + 1)^6 + (z - 1)^6 = 0$.
13. On considère la suite récurrente définie par la donnée de u_0 et u_1 , deux nombres complexes quelconques, et par l'équation de récurrence suivante : $u_{n+2} - u_{n+1} = a(u_{n+1} - u_n)$, pour un $a \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ce paramètre a pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit *périodique*³.
14. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.
- (1) Prouver l'égalité suivante : $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ (c'est l'identité du parallélogramme). Illustrer la situation afin de justifier cette appellation.
 - (2) En déduire : $|z| + |z'| = |a + \frac{z + z'}{2}| + |a - \frac{z + z'}{2}|$ avec a **une** racine carrée de zz' .
15. Soient a et b deux réels. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation suivante : $z^4 - 4 \cos(a) \cos(b) z^3 + 2(1 + \cos(2a) + \cos(2b)) z^2 - 4 \cos(a) \cos(b) z + 1 = 0$.
16. Soit a un complexe de module 1 (*i.e.* $a \in \mathbb{U}$) et z_1, \dots, z_n les solutions complexes de l'équation $z^n = a$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (*i.e.* les n racines $n^{\text{ème}}$ de a). Montrer que les points du plan complexe d'affixes $(1 + z_1)^n, \dots, (1 + z_n)^n$ sont alignés dans le plan euclidien⁴.

3. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *périodique* s'il existe un entier $T \geq 1$, appelé période, tel que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+T} = u_k$

4. On pourra essayer de voir si, par hasard, ces points ne seraient pas sur une droite qui passe par l'origine. Cela pourrait se caractériser à l'aide des arguments.