

Nombres complexes

1. Simplifier les expressions suivantes : $\tan(3\pi + \theta)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$, $\cotan(\theta - \frac{\pi}{2})$. (on suppose $\theta \in \mathbb{R}$ tel que ces expressions aient un sens)
2. Trouver¹ une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que l'on ait : $|z + i| = |z - i|$.
3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x) dx$. et $\int_0^{\pi/2} \cos^5(x) dx$.
4. Résoudre les équations suivantes :
 - (a) $z^2 + (1 - i)z - 1 + \frac{1}{4} = 0$
 - (b) $z^2 + (2 - 3i)z - 6i = 0$
 - (c) $3z^2 + (1 + i)z + 2 = 0$
5. Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence : $|u| = 1 \Leftrightarrow \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R}$.
6. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants (trouver le module et un argument) : $1 + i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $1 + e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $e^{ia} + e^{ib}$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
7. Que vaut le produit de toutes les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité avec n entier supérieur à 2?
8. Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

$\cos(x) + \sin(x) = 0$.

$\sin(4x) - \sqrt{3}\sin(3x) + \sin(2x) = 0$.
9. Déterminer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$ en utilisant une méthode trigonométrique puis algébrique.²
10. Soit $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\xi^k - 1|$.
11. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. On pourra introduire $Z = z + \frac{1}{z}$. Montrer ensuite que les solutions sont parmi les racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
12. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $(z + 1)^6 + (z - 1)^6 = 0$.
13. On considère la suite récurrente définie par la donnée de u_0 et u_1 , deux complexes, et de l'équation :

$u_{n+2} - u_{n+1} = a(u_{n+1} - u_n)$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

 Condition nécessaire et suffisante sur a pour que la suite soit périodique?
14. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.
 - (a) Prouver l'égalité suivante : $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ (égalité du parallélogramme)
 - (b) En déduire : $|z| + |z'| = |a + \frac{z+z'}{2}| + |a - \frac{z+z'}{2}|$ avec a une racine carrée de zz' .
15. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation :

$z^4 - 4\cos(a)\cos(b)z^3 + 2(1 + \cos(2a) + \cos(2b))z^2 - 4\cos(a)\cos(b)z + 1 = 0$.
16. Soit a un complexe de module 1 et z_1, \dots, z_n les solutions de $z^n = a$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les points d'affixes $(1 + z_1)^n, \dots, (1 + z_n)^n$ sont alignés dans le plan euclidien.³

1. penser à passer au carré et à utiliser la formule $|z|^2 = z\bar{z}$
 2. indication pour la deuxième : si $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$, alors $z^2 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et on connaît une méthode pour calculer une racine d'une complexe $a+ib$
 3. on peut essayer de voir si, par hasard, ces points ne seraient pas sur une droite passant par l'origine, ce qui se caractérise à l'aide des arguments.

ou suite périodique des $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq n_0$.

Fonctions usuelles

1. Résoudre sur l'ensemble approprié : $\ln|x+2| + \ln 3 \leq \ln|3x-4|$.

2. Montrer que les fonctions suivantes réalisent des bijections sur les ensembles appropriés et donner l'expression de leur réciproques (en donnant les ensembles de définition) :
 - (a) $f_1(x) = 3x - 5$
 - (b) $f_2(x) = \sqrt{3} - x$
 - (c) $f_3(x) = x^2 - 1$ (sur \mathbb{R}^-)
 - (d) $f_4(x) = \frac{1}{3x-2}$
 - (e) $f_5(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$
 - (f) $f_6(x) = \ln(2e^x - 1)$
3. Reprendre l'exercice précédent mais en étudiant la dérivabilité des fonctions et de leurs réciproques, puis en calculant ces dérivées.
4. Donner les ensembles de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :
 - (a) $f_1(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
 - (b) $f_2(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{-x^2-x+6}\right)$
 - (c) $f_3(x) = \ln(\cos(x))$
 - (d) $f_4(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$
 - (e) $f_5(x) = \sin(x)^{\cos(x)}$
 - (f) $f_6(x) = x^{x^x}$
5. Soient f et g définies par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et $g(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$. Déterminer les ensembles de définition de ces fonctions. Etablir le tableau de variation de f et montrer que l'on a $f(x) + g(x) = 0$ lorsque cela a un sens.
6. Préciser les valeurs pour lesquelles les expressions suivantes ont un sens et les simplifier :
 - (a) $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$
 - (b) $\ln_x(\ln_x(x^{x^x}))$
7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant les ensembles de définition/dérivabilité :
 - (a) $f(x) = \arccos(x-1)$
 - (b) $f(x) = \arctan|x|$
 - (c) $f(x) = \operatorname{argsh}(\sqrt{x^2-1})$
8. Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 3$, sans utiliser la formule exprimant argsh en terme de logarithme.
9. Trouver¹ la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.
10. Résoudre² l'équation $\sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(2+kx) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.
11. Résoudre le système :
$$\begin{cases} \operatorname{argsh}(x) = 2\operatorname{argsh}(y) \\ 3\ln(x) = 2\ln(y) \end{cases}$$

1. penser à écrire les puissances à l'aide d'exponentielles

2. technique assez semblable à celle utilisée pour calculer $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = 0$

12. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre l'équation :
 $(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^{\operatorname{argsh}(x-a)} = (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))^{\operatorname{argsh}(x-b)}$
13. Calculer $\sum_{k=0}^n C_n^k \operatorname{ch}(kx)$ et $\sum_{k=0}^n C_n^k \operatorname{sh}(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
14. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que, si $x = \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}))$, alors :
 $\operatorname{th}(\frac{x}{2}) = \tan(\frac{y}{2})$, $\operatorname{th}(x) = \sin(y)$ et $\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{\cos(y)}$
15. Simplifier les expressions suivantes :
- $\arctan(\tan(\frac{5\pi}{6}))$
 - $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}))$
 - $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$.
16. Étudier les expressions suivantes : (on cherchera une astuce)
- $\arccos(\frac{1-t^2}{1+t^2}) + \arcsin(\frac{2t}{1+t^2})$ pour $t \in \mathbb{R}$
 - $\arctan(\frac{x+y}{1-xy}) - \arctan(x) - \arctan(y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $xy \neq 1$.
17. Résoudre les équations suivantes :
- $\tan(3 \arcsin(x)) = 1$.
 - $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.
18. Calculer les sommes suivantes :
- $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$
 - $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$
 - $\arctan(\frac{p}{q}) + \arctan(\frac{q-p}{q+p})$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $0 < p < q$.

Les réels.

1. Montrer les inégalités classiques suivantes :
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 1, \exists n \in \mathbb{N}, a^n \geq x$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$.
 - $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
 - $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.
2. Majoration et minoration d'ensembles :
- Encadrer, pour $x \in [0, 3]$, la valeur de $\frac{x-1}{e^x+1}$.
 - Montrer que $\{\frac{\sin(x)-2\cos(x)}{e^{\sin(x)}} \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un ensemble borné.
 - Montrer¹ que $\{\sqrt{n^3+n+2} - \sqrt{n^3+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble majoré.
3. Déterminer le plus grand (resp. petit) élément ainsi que la borne supérieure (resp. inférieure) des ensembles E suivants, lorsque ces notions existent :
- $E = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
 - $E = A + B$ avec² A et B deux segments de \mathbb{R} et $A + B \stackrel{def}{=} \{x+y \mid (x,y) \in A \times B\}$.
 - $E = A - B$ avec A et B deux segments de \mathbb{R} et $A - B \stackrel{def}{=} \{x-y \mid (x,y) \in A \times B\}$.
 - Que peut-on dire si l'on considère que A et B sont des intervalles ouverts, non vides et bornés, de \mathbb{R} ? Ou encore deux parties bornées non vides de \mathbb{R} ?
 - $E = A \cup B$ avec A et B deux parties bornées de \mathbb{R} .
 - $E = \{(-1)^n a + \frac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^{++})^2$.
4. Soit B une partie bornée non vide de \mathbb{R} et $A \subset B$ un ensemble non vide. Montrer que l'on a : $\sup A \leq \sup B$.
5. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $\sqrt{2-2x} + \sqrt{3+x} = 1$.
6. Soit A une partie majorée non vide de \mathbb{R} avec $\sup(A) > 0$. Montrer que A contient un élément strictement positif.
7. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|$.
8. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ avec $a \geq b$. Simplifier l'expression $\sqrt{a+2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$.
9. Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} bornées. ($h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est bornée se traduit par : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| \leq M$). Montrer alors que l'on a : $\sup_{x \in \mathbb{R}} |(f+g)(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_i)_{i \in [1..n]}$ une famille de réels strictement positifs. Montrer que l'on a : $(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) \geq n^2$.
11. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'on a :
- $a \leq b \Rightarrow E(a) \leq E(b)$.
 - $E(a) + E(b) \leq E(a+b) \leq E(a) + E(b) + 1$.

¹On pourra se souvenir de l'utilisation des "quantités conjuguées"

²on pourra montrer que, si $A = [a, b]$ et $B = [c, d]$, alors $A + B = [a+c, b+d]$

no 10

- ✓ 12. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on a $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
- ✓ 13. (a) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
- (b) Calculer la partie entière de $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{i}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4

14. (a) Soit X une partie dense dans \mathbb{R} . Montrer que X n'est pas bornée.
- (b) Soit X une partie dense dans \mathbb{R} . Montrer que X privée d'un nombre fini d'éléments est toujours dense dans \mathbb{R} .
- (c) Montrer³ maintenant que \mathbb{R} privé d'une partie dénombrable est toujours dense dans \mathbb{R} .
- (d) On considère deux parties X et Y de \mathbb{R} avec $X \subset Y$. On suppose que X est finie et dense dans Y , montrer que $Y = X$. (on garde la même définition de densité que dans \mathbb{R}).

³On pourra montrer qu'un intervalle $]a, b[$ quelconque de \mathbb{R} , avec $a < b$, est non dénombrable, aussi "petit" soit-il...

Suites réelles.

1. Traduire, en terme de quantificateurs, les phrases suivantes :
- (a) la suite u ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.
 - (b) la suite u ne diverge pas vers $+\infty$.
 - (c) la suite u diverge.
2. Montrer que la suite \sqrt{n} diverge vers $+\infty$.
3. Trouver une suite divergente qui ne tend pas vers $\pm\infty$, ; puis une suite non bornée, à termes positifs, qui ne diverge pas vers $+\infty$.
4. Étudier la suite de terme général :
- (a) $u_n = \frac{n^2+3n-4}{4n^2+5}$.
 - (b) $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$.
 - (c) $u_n = \frac{n^4+7n}{5n^4+\cos(n^2)-\frac{1}{n}}$.
 - (d) $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.
5. Le produit de deux suites minorées est-il minoré ?
6. Montrer qu'une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
7. Soit u une suite bornée et v une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer que $u+v$ tend vers $+\infty$.
8. Soit u une suite convergente et v une suite divergente. Montrer que $u+v$ diverge. Que peut-on dire de $u.v$?
9. Soit u et v deux suites convergeant respectivement vers l et l' . On considère les suites w_i et ws définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \min\{u_n, v_n\}$ et $ws_n = \max\{u_n, v_n\}$. Montrer que les suites w_i et ws sont convergeantes et calculer leurs limites.
10. On considère une suite réelle u dont tous les termes sont des entiers relatifs. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.
11. Prouver¹ la convergence des suites de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$, et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
12. Soit u une suite bornée vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$. On définit alors la suite v par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer² que la suite v converge et calculer sa limite.
13. On considère deux suites u et v définies par leur premier terme $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ et la relation de récurrence :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$
- Montrer³ que ces deux suites convergent vers la même limite.
14. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On suppose que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite u converge.
15. Soit u une suite croissante. On suppose que u admet une suite extraite convergente ; prouver alors que u converge.
16. On considère une suite réelle u et on définit la suite v par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$.
(v_n est donc la moyenne des n premiers termes de u).

¹pour la deuxième, on pourra se rappeler la formule : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

²on pourra prouver que la suite v est monotone et bornée et raisonner par l'absurde pour prouver que la limite est nulle

³On pourra essayer de prouver que, à partir d'un certain rang, l'une est croissante, l'autre décroissante et que l'une est toujours supérieure à l'autre

(a) On veut montrer le résultat suivant : (théorème de Césaro) : si u converge, v converge vers la même limite. Vous pouvez chercher à démontrer ce résultat directement ou utiliser les questions intermédiaires :

* Montrer que l'on peut se restreindre à démontrer le théorème dans le cas où u converge vers 0.

* On suppose donc ici que u converge vers 0. On considère $\epsilon > 0$ fixé. On a donc l'existence de N un entier à partir duquel $|u_n|$ est inférieur à ϵ . Conclure alors en décomposant la somme en deux, avant et après N , et en utilisant le fait que la première partie tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

(b) Qu'en est-il de la réciproque ? Et de la réciproque en ajoutant l'hypothèse : u est croissante ?

17. Soit u une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$ tels que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$. Montrer⁴ que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

18. Étudier⁵ la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

19. Trouver un équivalent simple des suites de terme général :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} & u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. \\ u_n &= \sqrt{n + \sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2-1}}. & u_n &= \frac{e^n + e^{-n} + n}{\sqrt{n^2+n}-n}. \\ u_n &= \frac{\ln(n)+n!}{n^2+(n+1)!}. & u_n &= \frac{e^n + n!}{n+1}. \\ u_n &= e^{n^2+n!+\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

20. En admettant : si u_n tend vers $l \in \mathbb{R}$ alors e^{u_n} tend vers e^l , étudier les suites suivantes :

$$\begin{aligned} (a) \quad u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ (b) \quad u_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n. \\ (c) \quad u_n &= \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}. \end{aligned}$$

21. Trouver un équivalent du terme général de la suite u et en déduire le comportement de u dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} (a) \quad u_n &= \sin(\tan(\ln(n+1)) - \ln(n)). \\ (b) \quad u_n &= \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{\ln(n+1) - \ln(n)}. \\ (c) \quad u_n &= \frac{e^{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1}{1 - \cos(e^{-n})} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

22. Soit u une suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

- Montrer que u diverge vers $+\infty$.
- On considère la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$. Montrer que v est croissante.
- En majorant, pour $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n$, montrer que v est majorée. En déduire la convergence de v dont on note α la limite.
- Montrer que l'on a : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.
- En déduire : $u_n \sim e^{2^n \alpha}$.

⁴on pourra penser à Césaro

⁵on pourra étudier les suites u_{2n} et u_{2n+1}

Suites réelles : compléments

- ✓ 1. Soit $(u, v) \in S(\mathbb{R})^2$. On suppose que l'on a $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ et que uv tend vers 1. Que peut-on dire¹ de u et v ?
- ✓ 2. Soit $(u, v) \in S(\mathbb{R})^2$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $u \leq a$, que $v \leq b$ et que $u + v$ converge vers $a + b$. Montrer² que les suites u et v convergent et déterminer leur limite.
- ✓ 3. Soit $(u, v) \in S(\mathbb{R})^2$. On suppose que $u^2 + uv + v^2$ converge vers 0. Montrer³ que u et v convergent vers 0
- ✓ 4. Déterminer la limite des suites définies par les termes généraux suivants :
- (a) $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$
 - (b) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
 - (c) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
 - (d) $u_n = \frac{1}{n} (\sin \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$
 - (e) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
- ✓ 5. Soit $u \in S(\mathbb{R})$ une suite bornée. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$:
- $$v_n = \sup\{u_p | p \geq n\} \text{ et } w_n = \inf\{u_p | p \geq n\}.$$
- (a) Montrer que v et w convergent et comparer leur limite.
 - (b) Déterminer cette limite dans le cas où u converge.
- ✓ 6. Soit $u \in S(\mathbb{R})$. On suppose que $u > 0$ et qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$
- (a) Montrer que si $l \in [0, 1[$ alors u converge vers 0
 - (b) Montrer que si $l > 1$ alors u diverge vers $+\infty$
 - (c) Montrer que l'on ne peut rien dire si $l = 1$
- ✓ 7. Soit $u \in S(\mathbb{R})$. On suppose que $u > 0$ et qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$
- (a) Montrer que si $l \in [0, 1[$ alors u converge vers 0
 - (b) Montrer que si $l > 1$ alors u diverge vers $+\infty$
 - (c) Montrer que l'on ne peut rien dire si $l = 1$
- ✓ 8. On considère la suite harmonique S définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- (a) Montrer que S admet une limite
 - (b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ et en déduire la limite de S
 - (c) On considère maintenant une suite u vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_{n+1} - u_n) = 1$. Montrer que u diverge vers $+\infty$

1. on pourra montrer, en encadrant u et v et en utilisant le théorème des gendarmes, que u et v tendent vers une limite commune que l'on déterminera

2. de la même manière, on encadrera les suites pour utiliser le théorème des gendarmes afin de prouver que les deux suites convergent respectivement vers a et b

3. on pourra d'abord montrer que $u + v$ converge vers 0 et majorant $(u + v)^2$ de manière adéquate