

Oraux de mathématiques avec Python

ARTS & MÉTIERS

■ Exercice 1. *

- Pour un nombre entier n , que renvoie l'instruction `list(str(n))` ?
- Écrire une fonction `somme` qui à tout entier naturel associe la somme de ses chiffres.
- Un nombre est dit *adéquat* si la somme de ses chiffres est un multiple de 10. Écrire une fonction `test` qui renvoie le booléen `True` si le nombre est adéquat, et `False` sinon.
- Écrire une fonction `modification(n)` qui change le chiffre des unités de n pour qu'il soit adéquat. Si n est déjà adéquat, la fonction le renvoie sans modification.
- Tester la fonction pour 10 entiers choisis au hasard entre 10000 et 100000 grâce à la fonction `randint`.

■ Exercice 2. **

On admet que tout entier naturel n impair et non multiple de 5 possède un multiple entier N ne s'écrivant (en base 10) qu'avec des 1.

- Définir une fonction `QueDesUn(n)` renvoyant le plus petit N correspondant.
- Afficher les couples (n, N) pour n variant de 1 à 100.
- Définir une fonction donnant le nombre de chiffres (en base 10) d'un entier.
- Pour $n \leq 1000$, chercher les couples (n, N) avec N de longueur maximale (*i.e.* avec le nombre maximal de chiffres).

■ Exercice 3. **

Soit $T(n)$ la somme *modulo 2* des chiffres de l'écriture de n en base 2.

- Écrire une fonction d'argument un entier naturel n , qui renvoie une liste correspondant à sa décomposition en base 2.
- En déduire une fonction calculant $T(n)$.
- Écrire une fonction récursive calculant $T(n)$.

■ Exercice 4. *

Les diviseurs propres d'un entier sont les entiers naturels qui lui sont strictement inférieurs et le divisent. Par exemple pour 100 : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50.

- Écrire une fonction `LDP` qui pour un entier naturel n , renvoie la liste des diviseurs propres de n .

- Écrire une fonction `SDP` qui pour un entier naturel n , renvoie la somme des diviseurs propres de n . Pour 100 on trouvera 117.

- Un nombre parfait est égal à la somme de ses diviseurs propres. Écrire une fonction `parfaits` qui pour un entier naturel K , renvoie la liste des nombres parfaits inférieurs ou égaux à K , en affichant au fur et à mesure « p est parfait ».

- Deux nombres sont dits amicaux lorsque l'un est égal à la somme des diviseurs propres de l'autre et inversement. Écrire une fonction `amicaux`, qui pour un entier naturel K , renvoie la liste des couples de nombres amicaux (p, q) tels que $p < q \leq K$, en les affichant au fur et à mesure. (On attend un meilleur algorithme que le simple test de tous les couples (p, q) possibles.)

- Tracer les couples (p, q) .

■ Exercice 5. *

- On dispose d'un fichier texte `pi.txt` contenant les 1000 premières décimales de π . Lire le fichier et le convertir en chaîne de caractères. Afficher les 10 premières et les 10 dernières décimales.

- Écrire un programme permettant de vérifier si une chaîne de caractères de taille p est incluse dans une chaîne de taille n ($p \leq n$) et qui retourne l'indice du premier caractère si c'est le cas. Les chaînes 123456, 314159, 141592 et 0000 apparaissent-elles dans les 1000 premières décimales de π ?

■ Exercice 6. **

On s'intéresse aux nombres de Flavius Josèphe, construits de la façon suivante : on prend la liste des entiers naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8..., on en supprime un sur deux, il reste 1, 3, 5, 7, 9..., on en supprime un sur trois, il reste 1, 3, 7, 9, 13, 15... et ainsi de suite. Les nombres de Flavius Josèphe sont ceux qui ne sont jamais supprimés lorsqu'on répète ce processus indéfiniment.

- Écrire une fonction `retirer` qui, étant donné une liste L et un indice i , enlève les termes dont le rang est multiple de i : `retirer([1,3,5,7,9,11,13],3)` doit donner `[1,3,7,9,13]`.

- Écrire une suite d'instructions donnant la liste des nombres de Flavius Josèphe inférieurs ou égaux à 100.

- Écrire une fonction `FJ` qui, étant donné un entier n , renvoie tous les nombres de Flavius Josèphe inférieurs ou égaux à n .

- Écrire une fonction `U(n)` qui renvoie le nombre de nombres de Flavius Josèphe inférieurs ou égaux à n .

e. La suite $\left(\frac{4n}{U(n)^2}\right)$ semble-t-elle converger ? Conjecturer sa limite ℓ .

f. Déterminer le premier n pour lequel $\left|\left(\frac{4n}{U(n)^2}\right) - \ell\right| < 10^{-3}$.

■ **Exercice 7.** ★★

Le code creux consiste à coder un vecteur sans les zéros qu'il comporte et qui constituent une information inutile pour les calculs. Ce code comporte une première liste des coordonnées non nulles et une seconde qui indique leur position. Par exemple, le vecteur $(1, 2, 0, 5, 8, 0, 0, 0, 7)$ donne en code creux : $[[1, 2, 5, 8, 7], [1, 2, 4, 5, 9]]$.

a. Écrire une procédure permettant de coder un vecteur en code creux puis une autre permettant de le décoder.

b. Écrire une fonction réalisant le produit d'un scalaire et d'un vecteur en code creux.

c. Écrire une fonction réalisant le produit scalaire de deux vecteurs en code creux.

d. Écrire une fonction réalisant la somme de deux vecteurs en code creux.

■ **Exercice 8.** ★

Étude de la série de terme général $(-1)^{k+1}/\sqrt{k}$. On définit les sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \text{ et on note } S \text{ la somme de la série. On admet que, pour tout } n,$$

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}.$$

a. Trouver n tel que $S_n \leq S < S_n + 10^{-4}$.

b. Tracer les S_n pour $n \leq 200$.

c. On permute les termes : $T_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$ en alternant un terme positif, deux termes négatifs, dans l'ordre. Tracer les T_n pour $n \leq 200$.

d. On permute autrement : deux termes positifs puis un terme négatif. Tracer pour $n \leq 200$.

■ **Exercice 9.** ★★

a. Tracer le graphe de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5, 5]$.

b. Donner la définition des polynômes de Lagrange. Écrire une fonction `interpoler(h,x,a)` prenant en argument une fonction h à interpoler, un réel x et une liste $a = [a_0, \dots, a_{k-1}]$ de points d'interpolation, et calculant la valeur en x du polynôme de Lagrange associé P tel que $P(a_i) = f(a_i)$ ($0 \leq i < k$).

c. Écrire une fonction `affiche(n)` qui trace f sur $[-5, 5]$ ainsi que le polynôme de Lagrange associé à f avec une liste de $n+1$ points d'interpolation équirépartis dans $[-5, 5]$. Tester cette fonction pour $n \in \{5, 10, 15, 20\}$. Commenter.

d. Commenter le résultat obtenu en prenant les points d'interpolation de Tchebychev $a_i = 5 \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n}$, $0 \leq i < n$.

■ **Exercice 10.** ★

Dans une usine, certaines pièces d'un lot sont défectueuses en sortie de production ; un lot $L = (u, z)$ est composé de u pièces défectueuses et z pièces correctes. On prendra pour ce problème $u = 10$ et $z = 20$.

a. Expliquer le programme suivant dont on pourra se servir par la suite :

```
def tirer(u, z) :  
    r = random.randint(1, u + z)  
    if r <= u :  
        return 1  
    else :  
        return 0
```

b. Écrire un programme TA qui prendra pour arguments u , z et n et qui renvoie une liste de n tirages avec remise dans un lot. Tester pour $n = 30$.

c. Écrire un programme TS qui prendra pour arguments u , z et n et qui renvoie une liste de n tirages sans remise dans un lot. Tester pour $n = 30$, $n = 15$ et $n = 40$; corriger le programme si nécessaire.

■ **Exercice 11.** ★

Étude d'une méthode de mélange des cartes. Les cartes d'un jeu sont numérotées de 1 à n , et sont initialement dans l'ordre. On représente le jeu par la liste $[1, \dots, n]$.

a. Écrire une fonction qui prend la première carte et qui la place ailleurs dans le paquet, selon la loi uniforme (on pourra utiliser la fonction `randint` du module `random`).

b. Écrire une fonction qui réitère k fois la manipulation précédente.

c. On note X le nombre d'itérations nécessaires pour avoir mélangé chaque carte au moins une fois (c'est-à-dire pour que la carte n arrive sur le dessus du paquet et soit mélangée à son tour). Écrire une fonction effectuant le mélange et renvoyant la valeur de X .

d. Conjecturer la forme de l'espérance de X .

■ **Exercice 12.** ★

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
- On note $f(x)$ la somme de cette série. À l'aide de Python, donner une valeur approchée de $f(1)$ puis tracer le graphe de f sur un intervalle pertinent.
- Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

■ **Exercice 13.** ★

- Construire à l'aide du logiciel le tableau b tel que pour tout $(i, j) \in \{0, \dots, 12\}^2$, $b_{i,j} = \binom{i}{j}$ si $i \geq j$, $b_{i,j} = 0$ sinon.

- On pose $u_{n,k} = \frac{k^n}{k!}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$ est bien défini.

- Donner les valeurs exactes de A_0 et A_1 .
- Pour tout $n \geq 0$, exprimer A_{n+1} en fonction de A_0, \dots, A_n .
- S'en servir pour calculer les valeurs exactes des A_n pour n allant de 0 à 12.

- On étudie la série entière $\sum \frac{A_n}{n!} x^n$.

- Montrer que $A_n \leq n!e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que le rayon de convergence R de la série entière est ≥ 1 .
- Soit $f(x)$ la somme de la série, pour tout $x \in]-R, R[$. Représenter avec le logiciel f sur un intervalle bien choisi.
- Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène.
- Donner une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

■ **Exercice 14.** ★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\sigma(n) = \text{Card}\{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid n = 2p + 3q\}$.

- Montrer que $\sigma(n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\sigma(0)$, $\sigma(1)$, $\sigma(2)$. Montrer que $\sigma(n) \geq 1$ pour $n \geq 3$.
- Écrire une fonction permettant de calculer $\sigma(n)$. Déterminer alors $\sigma(n)$ pour $n \in \llbracket 0, 25 \rrbracket$.
- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \sigma(n)x^n$. Sur un intervalle I que l'on déterminera, montrer que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n)x^n = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}.$$

■ **Exercice 15.** ★★

Soit $S = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} ; \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1} \right\}$. On désigne par $u_n(x)$ le n -ième terme de la suite de S telle que $u_0 = x$.

- Écrire une fonction `suite(n,x)` qui renvoie $u_n(x)$. Tester la fonction pour quelques valeurs. Tracer les premiers termes de la suite pour différentes valeurs de x . Commenter.
- Tester pour $n = 31$ et $x = 1,6616$, pour $n = 17$ et $x = 1,6617$. Commenter.
- Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :
(i) $\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$; (ii) $\exists n \in \mathbb{N}^*, u_n < 1$; (iii) (u_n) tend vers 0.
- Montrer que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq N + 2$ alors pour tout $n \geq N$, $u_n \geq n + 2$.
- Étudier les cas $x = 1$ et $x = 2$.
- On pose $E_0 = \{x > 0 ; u_n(x) \rightarrow 0\}$ et $E_\infty = \{x > 0 ; u_n(x) \rightarrow +\infty\}$. Montrer que E_0 et E_∞ sont deux intervalles tels que $\mathbb{R}^{+*} = E_0 \cup E_\infty$.

■ **Exercice 16.** ★★

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit $f_p(x) = \int_0^1 \sqrt{x+t^p} dt$.

- Calculer $f_p(1)$ pour $0 \leq p \leq 10$ (utiliser `scipy.integrate`). Déterminer la limite de la suite $(f_p(1))_{p \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que les f_p sont continues sur \mathbb{R}^+ .
- Tracer avec Python les f_p pour $x \in [0, 5]$ et $p \in \{1, \dots, 6\}$.
- Simplifier f_0 et f_1 . Montrer qu'elles sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .
- Montrer que f_p est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} pour tout $p \geq 2$.

■ **Exercice 17.** ★★★

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

- Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} .
- Tracer le graphe de f .
- Montrer qu'il existe un unique $r_n \in]n\pi, (n+1)\pi[$ tel que $f(r_n) = 0$.
- Écrire une fonction `approx(n)` qui donne une valeur approchée de r_n .
- Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} et que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

■ **Exercice 18.** ★★

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a < b$ deux réels. Pour tout $P \in E$ on pose $f_1(P) = P(a)$, $f_2(P) = P(b)$ et $f_3(P) = P(\frac{1}{2}(a+b))$.

a. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

b. Soit $\phi : P \mapsto \frac{1}{b-a} \int_a^b P$. On note $A = \begin{pmatrix} f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_1(X) & f_2(X) & f_3(X) \\ f_1(X^2) & f_2(X^2) & f_3(X^2) \end{pmatrix}$ et

$B = \begin{pmatrix} \phi(1) \\ \phi(X) \\ \phi(X^2) \end{pmatrix}$. À l'aide de Python, calculer A et B en prenant $a = -1$ et $b = 3$.

Vérifier que A est inversible et calculer $C = A^{-1}B$. Faire de même pour $a = 0$ et $b = 5$.

c. Faire une conjecture sur C puis la démontrer.

d. Trouver une relation entre ϕ et les f_i .

e. On étend la définition de ϕ et des f_i à $\mathbb{R}_4[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Montrer que $|\phi(P) - \alpha f_1(P) - \beta f_2(P) - \gamma f_3(P)| = M(b-a)^4$ où M est un réel à préciser en fonction de P et α, β, γ sont les coefficients trouvés à la question précédente.

■ **Exercice 19.** ★★★

a. Soit $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. Afficher les trente premières puissances de M

ainsi que leurs valeurs propres. Que peut-on raisonnablement conjecturer ?

b. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $V = (a_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$. On suppose les a_i distincts. Montrer que V est inversible.

c. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. On suppose que $A^n \rightarrow 0$. Montrer que le spectre de A est inclus dans D .

d. Soient a, b, c dans \mathbb{C} distincts. On suppose que $a^n + b^n + c^n \rightarrow 0$. Montrer que a, b et c sont dans D .

e. Montrer que si $\text{Tr}(A^n) \rightarrow 0$ alors le spectre de A est inclus dans D .

■ **Exercice 20.** ★★

1. Soit $(a_{n-1}, \dots, a_0) \in \mathbb{R}^n$, $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a. Écrire une fonction `matrice(L)` qui pour une liste $L = [a_{n-1}, \dots, a_0]$ renvoie la matrice M .

b. Calculer le polynôme caractéristique de M pour des listes L de 8 entiers aléatoires compris entre 0 et 9 (on pourra utiliser la fonction numpy `np.poly`). Conjecture ?

c. Calculer χ_M dans le cas général.

2. À quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

3. On choisit $L = [3, 2, 1, 2, 3]$ et on note $A = M(L)$.

a. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre réelle $a > 1$.

b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^k$ est un entier.

c. La série $\sum \sin(\pi a^n)$ est-elle convergente ?

■ **Exercice 21.** ★★

On considère l'application $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \widehat{A}$ où $\widehat{A} = (a_{n+1-i, n+1-j})_{1 \leq i, j \leq n}$ (matrice centro-transposée de A). On note J_n la matrice $(\delta_{i, n+1-j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. a. Écrire en Python une fonction `J(n)` qui retourne la matrice J_n .

b. Écrire en Python une fonction qui renvoie une matrice pseudo-aléatoire à coefficients entiers entre 0 et 100 (on pourra se servir de la fonction `np.random.randint(0, 100, (n, n))` de numpy).

c. Écrire en Python la fonction `centroTrans(A)` qui renvoie \widehat{A} .

d. Conjecturer une relation entre $\det \widehat{A}$ et $\det A$. Si A est inversible, conjecturer une relation entre $\widehat{A^{-1}}$ et \widehat{A}^{-1} .

e. À l'aide de Python, calculer AJ_n et J_nA . Conjecturer une relation entre \widehat{A} , A et J_n .

2. a. Montrer que l'application $A \mapsto \widehat{A}$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\widehat{\widehat{A}} = A$.

c. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B}$.

d. Prouver les conjectures de la question 1.

3. a. On note $C_n^+ = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \widehat{A} = A\}$ et $C_n^- = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \widehat{A} = -A\}$. Montrer que C_n^+ et C_n^- sont supplémentaires.

b. On note $S_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ et $A_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = (C_n^+ \cap S_n) \oplus (C_n^+ \cap A_n) \oplus (C_n^- \cap S_n) \oplus (C_n^- \cap A_n)$.

■ **Exercice 22.** ★

Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

- Calculer P_n pour $2 \leq n \leq 8$. Conjecturer la parité, le degré et le coefficient dominant de P_n ; démontrer ces conjectures.
- Montrer que $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_8[X]$.
- Calculer $(P_i|P_j)$ pour $0 \leq i, j \leq 8$. Qu'en déduire sur $(P_n)_{0 \leq n \leq 8}$?
- Donner la matrice de $\phi : \mathbb{R}_8[X] \rightarrow \mathbb{R}_8[X], P \mapsto 3XP' - P''$ dans la base des P_n .

■ **Exercice 23.** ★★

Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt.$$

- Montrer que ces intégrales sont bien définies et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- Exprimer I_n en fonction de I_{n-2} .
- Écrire un programme récursif permettant de calculer I_n .
- Écrire un programme permettant de calculer le produit scalaire de deux polynômes P et Q .
- Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$.
- Soit $P_0 = 1 + X + \dots + X^5$. Conjecturer la valeur de $d = \text{dist}(P_0, \mathbb{R}_4[X])$ (calculer d^2/I_0).

■ **Exercice 24.** ★

On dispose de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n . La j^{e} urne contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j . On effectue des tirages successifs dans ces urnes. Le premier tirage se fait dans l'urne n . Si au k^{e} tirage, on tire la boule j , le prochain tirage s'effectue dans l'urne j . On note X_k le résultat du k^{e} tirage. On pose $X_0 = n$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix}.$$

- Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
 - Montrer que la suite $(A^k)_{k \geq 1}$ converge. On note L la matrice limite. Déterminer la nature géométrique de L .
 - Écrire une fonction `matriceA(n)` qui construit la matrice A .

d. À l'aide de `np.linalg.eig`, retrouver les valeurs propres de A et donner un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

2. Écrire une fonction prenant en arguments n et le nombre k de lancers, qui renvoie la liste des tirages. On pourra utiliser la fonction `np.random.randint`.

3. a. Déterminer $P(X_{k+1} = j)$ en fonction des $P(X_k = i)$ pour des valeurs de i bien choisies.

b. Montrer que $W_{k+1} = AW_k$.

c. En déduire une relation entre W_k et W_0 .

d. Réaliser un programme calculant W_k . Conclure.

4. a. Trouver une matrice-ligne B telle que $E(X_k) = BW_k$.

b. Déterminer BA en fonction de B .

c. En déduire la valeur de $E(X_k)$.

d. Écrire une fonction prenant en arguments n et k , qui effectue 1000 simulations et renvoie des valeurs approchées de $E(X_1), \dots, E(X_k)$. Commenter.

5. Montrer que la suite (W_k) converge et déterminer sa limite.

■ **Exercice 25.** ★★

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires réelles discrètes suivant la même loi et mutuellement indépendantes et N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} indépendante des précédentes. On pose $Y = \sum_{k=1}^N X_k$.

1. a. Définir une fonction permettant de calculer Y pour $X_1 \sim \mathcal{B}(50, 1/50)$ et $N \sim \mathcal{P}(1/12)$.

b. Réaliser dix fois de suite une série de 1000 expériences et donner la moyenne et l'écart-type de Y .

2. On se replace dans le cas général.

a. Exprimer G_Y en fonction de G_{X_1} et G_N .

b. En déduire $E(Y)$.

c. Déterminer $E(Y)$ pour $N \sim \mathcal{P}(m)$ et $X_1 \sim \mathcal{B}(n, p)$.

3. Dans une entreprise de 50 employés, soit Y la variable aléatoire indiquant le nombre de blessés dans une période τ , N indiquant le nombre d'accidents dans cette période et X_1 le nombre de blessés par accident. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{B}(50, 1/50)$ et $N \sim \mathcal{P}(1/12)$.

a. Quel est le nombre moyen de blessés durant la période τ ?

b. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un blessé?

c. Déterminer la variance de Y .

■ **Exercice 26.** ★

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Calculer $E(X)$. Donner une expression de sa fonction génératrice.

b. Soit X_1, \dots, X_p des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois uniformes sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On pose $S_p = U_1 + \dots + U_p$. Déterminer la fonction génératrice de S_p .

c. Écrire une fonction permettant de calculer la somme des k premiers coefficients d'un polynôme.

d. Écrire une fonction permettant de calculer les coefficients des puissances d'un polynôme (donné par ses coefficients).

e. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = P(S_p \leq k)$. Observer le comportement de (u_p) . Démontrer le résultat.

■ **Exercice 27.** ★★

On note $c(n)$ le nombre de chiffres de l'entier n en base 10.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quel est le cardinal de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid c(n) = k\}$?

2. a. Écrire une fonction qui à un entier n associe $c(n)$.

b. Écrire une fonction `couples(n)` qui retourne le nombre de couples (a, b) d'entiers à n chiffres tels que le produit ab comporte $2n$ chiffres.

c. Calculer $\frac{\text{couples}(k)}{81 \times 10^{2k-2}}$ pour $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

3. Soit p_n la probabilité que le produit de deux entiers à n chiffres choisis indépendamment soit un nombre entier à $2n$ chiffres. Montrer que :

$$1 - p_n = \frac{1}{81 \times 10^{2n-2}} \cdot \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n-1} \left(\left\lfloor \frac{10^{2n-1} - 1}{k} \right\rfloor - 10^{n-1} + 1 \right).$$

4. On pose $A_n = \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n-1} (10^{n-1} - 1)$ et $B_n = \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n-1} \left\lfloor \frac{10^{2n-1} - 1}{k} \right\rfloor$.

a. Calculer A_n et déterminer un équivalent en $+\infty$.

b. Trouver un équivalent de B_n en $+\infty$.

c. En déduire que (p_n) est convergente. Donner une approximation numérique de la limite.

■ **Exercice 28.** ★

Soit $n \in \mathbb{N}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $B_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$. Soit

$\sigma = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^2 et f la fonction vectorielle définie par $f(t) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(t) P_k$. On dit que la courbe paramétrée par f est la *courbe de Bézier* associée à σ .

1. Cas $n = 3$. On donne $P_0 = (-2, 2)$, $P_1 = (1, 5)$, $P_2 = (5, 3)$ et $P_3 = (3, 1)$.

a. Calculer $f(t)$ pour $t \in [0, 1]$.

b. Tracer sur le même graphe la courbe paramétrée par f et la ligne polygonale joignant P_0, P_1, P_2, P_3 .

2. Cas général. On suppose $n \geq 2$.

a. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$ en fonction des points P_k .

b. Montrer que la famille $(B_{n,k})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que toute fonction vectorielle polynomiale est une courbe de Bézier.

c. Soit $g(t) = (-t^3 + 2t + 1, t^3 + 5t^2 - 2)$. À quelle suite σ la courbe paramétrée par g est-elle associée ?

3. Tracer sur un même graphe les courbes représentatives sur $[0, 1]$ des fonctions $B_{7,k}$ pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Pour quelles valeurs de k la norme $\|B_{7,k}\|_\infty$ est-elle maximale ? Conjecturer le résultat pour n entier quelconque.

■ **Exercice 29.** *St Cyr* ★★

a. Programmer la méthode des trapèzes.

b. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $I(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{Arctan}(x \tan t)}{\tan t} dt$.

c. Justifier que $I(x)$ est définie pour tout $x \geq 0$.

d. Tracer la courbe de I pour $x \in [0, 10]$.

e. Déterminer numériquement un réel x_0 tel que $I(x_0) = \frac{\pi}{2}$.

f. Calculer $I(x)$.