

Soit un entier $n \geq 1$ et a un réel non nul. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & 1/a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Écrire une fonction qui étant donné un entier $n \geq 1$ et un réel a non nul renvoie la matrice $A_{n,a}$.
2. Donner des valeurs approchées décimales des valeurs propres de $A_{n,a}$ pour $3 \leq n \leq 8$ et a dans $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$.
3. Soit $(P_n)_{n \geq 1}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X \quad P_2 = X^2 - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

- a. Calculer les coefficients de P_3, \dots, P_8 .
 - b. Donner des valeurs approchées des racines de P_3, \dots, P_8 .
 - c. Conjecturer un lien entre P_n et $A_{n,a}$ et le démontrer.
4. Les matrices $A_{n,a}$ sont-elles inversibles ? diagonalisables ?
 5. Trouver un segment de \mathbb{R} contenant toutes les valeurs propres de $A_{n,a}$ pour n entier et a réel dans \mathbb{R}^* .