

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

Soit pour tout entier naturel  $n$  :

$$x_n(t) = 4 \cos t - \cos(nt)$$

$$y_n(t) = 4 \sin t - \sin(nt)$$

On note  $\mathcal{C}_n = \{(x_n(t), y_n(t)), t \in [0, 2\pi]\}$ .

1. Tracer les courbes  $\mathcal{C}_n$  pour  $n$  allant de 2 à 7.
2. À l'aide de la représentation graphique, préciser les éventuelles symétries et les prouver par le calcul.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de  $n$ , la courbe  $\mathcal{C}_n$  admet-elle des points qui ne sont pas réguliers ?

Donner le temps de passage aux points non réguliers.

À l'aide d'un développement limité, déterminer l'allure de l'arc au voisinage de ces points.

4. On note  $\ell_n$  la longueur de la courbe  $\mathcal{C}_n$ .

Soit  $M_n$  le point de coordonnées  $(n, \ell_n)$ .

Représenter graphiquement la liste de points  $(M_n)_{1 \leq n \leq 20}$ .

5. Trouver un équivalent de  $\ell_n$  pour  $n$  au voisinage de l'infini.