

Pour  $n$  entier, on pose

$$S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad T_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right)$$

1. Programmer une fonction `binom(n,k)` qui calcule le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  avec  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
2. Programmer une fonction `Sn(n)` qui calcule le terme  $S_n$ .
3. Afficher simultanément les termes des suites  $(S_n)_{n \in [0,10]}$  et  $(T_n)_{n \in [0,10]}$ .

Que constate-t-on ?

4. Rappeler les développements en série entière et les rayons de convergence des fonctions  $\cos$  et  $\exp$ .
5. En déduire que la fonction  $x \mapsto \cos(x) e^x$  est développable en série entière et préciser son rayon de convergence.
6. En utilisant ce qui précède, démontrer le résultat observé à la question 3.
7. Proposer une nouvelle démonstration sans passer par l'usage de séries entières.
8. Déterminer une formule simple pour le calcul de  $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$  avec  $n$  entier.

La vérifier par simulation.