

Pour n entier, on pose

$$S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad T_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right)$$

1. Programmer une fonction `binom(n,k)` qui calcule le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
2. Programmer une fonction `Sn(n)` qui calcule le terme S_n .
3. Afficher simultanément les termes des suites $(S_n)_{n \in [0,10]}$ et $(T_n)_{n \in [0,10]}$.

Que constate-t-on ?

4. Rappeler les développements en série entière et les rayons de convergence des fonctions \cos et \exp .
5. En déduire que la fonction $x \mapsto \cos(x) e^x$ est développable en série entière et préciser son rayon de convergence.
6. En utilisant ce qui précède, démontrer le résultat observé à la question 3.
7. Proposer une nouvelle démonstration sans passer par l'usage de séries entières.
8. Déterminer une formule simple pour le calcul de $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$ avec n entier.

La vérifier par simulation.