

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ . On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  pour  $n$  entier non nul.

1. Préciser la loi de  $S_n$ , son espérance et sa variance.
2. Déterminer une expression sommatoire (que l'on ne cherchera pas à simplifier) de  $\mathbb{P}(S_n < \frac{n}{2})$ .
3. Programmer une fonction `binom(n,k)` qui calcule le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  avec  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
4. Programmer une fonction `sn2(n)` qui calcule  $\mathbb{P}(S_n < \frac{n}{2})$ .
5. Pour  $n \geq 1$ , on note  $u_n = \mathbb{P}(S_n < \frac{n}{2})$ . Représenter les termes de la suite  $(u_{20k})_{k \in \llbracket 1, 100 \rrbracket}$ .

Que peut-on conjecturer ?

6. Pour  $n \geq 1$ , on note  $v_n = \mathbb{P}(S_n \geq \frac{n}{2})$ . établir l'égalité

$$\forall n \geq 1 \quad v_n = u_n + \mathbb{P}\left(S_n = \frac{n}{2}\right)$$

7. En déduire une démonstration du résultat observé à la question 5.
8. On note  $w_n = \mathbb{P}(S_{2n} = n)$  pour  $n \geq 1$ . En considérant  $\ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right)$ , retrouver le résultat précédent sans utiliser l'équivalent de Stirling.