

# TP n° 7: Un problème d'ordonnancement

BATOG Guillaume

29 mars 2007

Soit  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  un ensemble de  $n$  activités proposées qui veulent utiliser une ressource qui ne peut servir qu'à une seule activité à la fois (par exemple, une salle de cours). Chaque activité a une heure de début  $s_i$  et une heure de fin  $f_i$  avec  $0 \leq s_i < f_i < \infty$ . Si cette activité est sélectionnée, elle a lieu au cours de l'intervalle  $[s_i, f_i[$ . Deux activités sont dites compatibles si l'intersection de leurs horaires est vide. Le problème du choix d'activités consiste à sélectionner un sous-ensemble maximum d'activités mutuellement compatibles.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s_i$	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
$f_i$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Dans toute la suite, on supposera que les activités sont triées par ordre croissant d'heure de fin.

**Question 1** [Approche programmation dynamique]

On note  $S_{ij} = \{a_k \in S \mid f_i \leq s_k < f_k \leq s_j\}$  le sous-ensemble de  $S$  des activités qui se déroulent après  $a_i$  et avant  $a_j$ . On note  $c[i, j]$  la taille maximum d'un sous-ensemble de  $S_{ij}$  d'activités mutuellement compatibles. Exprimer une relation de récurrence sur les  $c[i, j]$ . En déduire un algorithme qui résout le problème du choix d'activités.

**Question 2** [Approche gloutonne]

1. Soit  $S_{ij}$  non vide et  $a_m$  une activité de  $S_{ij}$  ayant une heure de fin minimum. Montrer que  $a_m$  appartient à un sous-ensemble maximum d'activités mutuellement compatibles de  $S_{ij}$ .
2. En déduire un algorithme récursif qui résout le problème du choix d'activités.

**Question 3** [Minimiser le nombre de salles]

Ici, on dispose d'une infinité de ressources, le but étant de minimiser le nombre de ressources permettant de réaliser l'ensemble des activités. On définit le graphe (non orienté) d'intervalles de  $S$  par  $(S, E)$  où  $\{a_i, a_j\} \in E$  si et seulement si les activités  $a_i$  et  $a_j$  sont incompatibles.

1. Écrire un algorithme déterminant le nombre minimum de ressources à utiliser pour réaliser  $S$ . Pour toute activité  $a_i$ , on considère les deux triplets  $(s_i, G, i)$  et  $(f_i, D, i)$  et on munit l'ensemble de ces triplets de l'ordre lexicographique ( $G < D$ ).
2. En déduire un algorithme qui détermine une ressource pour chaque activité.

*Pour s'entraîner : épreuve pratique des ENS, juillet 2005, "Graphes d'intervalles".*