Matrices

MPSI– SEMAINE 19

▪ **399** ▪ TAGS : mpsi | matrice | complexe | groupe |

Exercice 1 *(Représentation complexe)*.
On note $SO_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices dans $M_2(\mathbb{R})$ qui vérifient ${}^tMM = I_2$ et qui vérifient $ad - bc = 1$.

(i) Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $GL_2(\mathbb{R})$

(ii) Calculer le produit suivant
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(iii) En déduire que tout élément de $SO_2(\mathbb{R})$ est inversible et expliciter son inverse

(iv) Montrer que les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ sont de la forme
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(v) Montrer qu'à une matrice dans $SO_2(\mathbb{R})$ on peut associer un nombre complexe $z \in \mathbb{U}$.

(vi) Montrer que cette représentation respecte sommes et produits

▪ **400** ▪ TAGS : mpsi | trace | matrice | vectoriel |

Exercice 2 *(Trace ...)*. Existe-il des matrices A et B telles que $AB - BA = I$?

▪ **401** ▪ TAGS : mpsi | matrice | commute | groupe | centre |

Exercice 3 *(Centre(s))*.

(i) Quelles sont les matrices de $M_n(k)$ qui commutent avec toutes les autres matrices ?
Indication : $E_{i,j}$ ...

(ii) Que devient ce résultat pour $GL_n(k)$?
Indication : Comment rendre $E_{i,j}$ inversible ?

(iii) Adapter ce résultat aux matrices symétriques

(iv) Adapter ce résultat aux matrices antisymétriques

▪ **402** ▪ TAGS : mpsi | matrice |

Exercice 4 *(Somme des termes d'une matrice)*. Pour une matrice A on note $\sigma(A)$ la somme des termes de A.
On pose
$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
Vérifier que $JAJ = \sigma(A)J$

▪ **403** ▪ TAGS : mpsi | matrice | suite | iteree |

Exercice 5 *(Puissance de matrice)*. On considère la matrice A définie ci-dessous et $B = A - I$.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Étudier B^n pour $n \in \mathbb{N}$

(ii) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$

▪ **404** ▪ TAGS : mpsi | matrice | equation |
Exercice 6 *(Équation matricielle).*
Résoudre l'équation $X^2 = A$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Indication : Une solution doit commuter avec A ...

▪ **335** ▪ TAGS : mp | lineaire | determinant | arithmetique |
Exercice 7 *(Déterminant et arithmétique).*
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ telle que

$$a_{i,j} = \sum_{k | i \wedge k | j} \psi(k) \tag{1}$$

1. Montrer que $\det A = \psi(1) \dots \psi(n)$.
2. En déduire le déterminant de la matrice où $a_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à i et j
3. En déduire le déterminant de la matrice où $a_{i,j}$ est la somme des diviseurs communs à i et j
4. (Bonus) En déduire le déterminant de la matrice où $a_{i,j} = \mathrm{pgcd}(i, j)$