Réduction
Espaces préhilbertiens réels

MP– SEMAINE 19

1 Réduction

▪ **397** ▪ TAGS : mp | reduction | trigonalise | crochet | lie |

Exercice 1 *(Crochet de Lie).*

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Si $u, v \in \mathbb{L}(E)$ on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

1. Supposons $[u, v] = \alpha u$, calculer $[u^p, g]$.
2. En déduire un ensemble de valeurs propres pour l'opérateur $h \mapsto [h, v]$
3. Conclure que u est nilpotente.
4. Montrer que $\ker u$ est stable par v
5. En déduire que u et v ont un vecteur propre commun.
6. En appliquant ce résultat aux transposées, déduire que u et v ont un hyperplan stable commun.

   Indication : $x^T Ay = (A^T x)^T y$...
7. Conclure que u et v sont co-trigonalisables.
8. Adapter le raisonnement précédent pour avoir la même conclusion quand $[u, v] = \alpha u + \beta v$

   Indication : Poser $f = u + \frac{\beta}{\alpha} v$ ...

▪ **346** ▪ TAGS : mp | polynome | endomorphisme | algebre | lineaire |

Exercice 2 *(Valeur propre commune).*

Soient A et B deux matrices carrées.

1. Soit $P \neq 0$ tel que $AP = PB$, montrer que A et B ont une valeur propre commune

   Sous questions :
   (a) Que dire des polynômes en A et en B ?
   (b) Quel est le lien entre valeurs propres et racines de polynômes ?
   (c) Quelle est l'écriture factorisée du polynôme caractéristique ?
   (d) En déduire que $(B - \lambda_i I)$ est non inversible pour un certain i
2. Montrer la réciproque

   Sous questions :
   (a) Soit v, λ un élément propre commun à A et B, décomposer l'espace en somme directe.
   (b) Définir P sur la décomposition de manière à ce que $Pv = v$ et $Px = 0$ autrement
   (c) Conclure que P convient.

▪ **392** ▪ TAGS : mp | reduction | kronkecker | polynome |
Exercice 3 *(Théorème de Kronecker).*

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et de degré n. Existe-t-il une matrice M à coefficients entiers dont le polynôme caracrésitique est P ?
2. Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers avec pour racines $(\lambda_i)_i$ comptées avec multiplicité. Considérons $q \geq 1$
   Montrer que le polynôme suivant est à coefficients entiers
   $$P_q = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^q) \tag{1}$$
3. Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers dont toutes les racines sont de module inférieur à 1.
   — Montrer qu'il y a un nombre fini de polynômes P_q
   — En déduire que les racines de P non nulles sont des racines de l'unité.

▪ **393** ▪ TAGS : mp | spectre | reduction | operateurs |
Exercice 4 *(Une équation matricielle).*

1. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on pose
   $$\sin(A) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \tag{2}$$
   Justifier l'existence d'une telle matrice
2. Calculer $\sin A$ dans le cas où A est diagonale
3. Calculer $\sin A$ dans le cas où A est trigonale
4. Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant l'égalité suivante ?
   $$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

2 Espaces préhilbertiens réels

▪ **405** ▪ TAGS : mp | vectoriel | hilbertien | topologie | polynome | orthogonal |
Exercice 5 *(Polynômes orthogonaux).*
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire suivant
$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt \tag{4}$$

1. Établir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes P_n deux à deux orthogonaux tels que P_n est de degré n et de coefficient dominant 1.
2. Étudier la parité des polynômes P_n
3. Prouver que $P_{n+1} - XP_n$ est un élément orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$
   Indication : $\langle XP_n, Q \rangle = \langle P_n, XQ \rangle$
4. En déduire qu'il existe une suite λ_n telle que
   $$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1} \tag{5}$$
   Indication : Degré, orthogonalité et parité

▪ **406** ▪ TAGS : mp | vectoriel | hilbertien | topologie | orthogonal |
Exercice 6 *(Famile obtusangle).*
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E un espace préhilbertien réel avec $n \geq 2$.
On suppose

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \langle x_i | x_j \rangle < 0 \tag{6}$$

Montrer que toute sous famille de $n-1$ vecteurs est libre.

Indication : Récurrence