Probablités (2)

MP– Semaine 16

▪ 353 ▪

Exercice 1 *(Une variante de l'inégalité de Tchebychev).*
Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = m$ et une variance $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$. Fixons $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda > 0$, démontrer
$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda) \tag{1}$$
2. Vérifier que
$$\mathbb{E}\left((X - m + \lambda)^2\right) = \sigma^2 + \lambda^2 \tag{2}$$
3. En déduire que
$$\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2} \tag{3}$$
4. Démontrer
$$\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2} \tag{4}$$
5. Comparer à l'inégalité de Tchebychev

▪ 354 ▪

Exercice 2 *(Zeta mon amour).*
On définit un espace probabilisé sur $\Omega = \mathbb{N}^*$ par
$$\mathbb{P}(\{n\} = \frac{1}{\zeta(s) n^s} \tag{5}$$
Où $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$.

1. Justifier que c'est bien une loi de probabilité pour $s > 1$.
2. Soit A_n l'évènement « être un multiple de n ». Montrer que les évènements A_p pour p premier sont indépendants dans leur ensemble.
3. Exprimer l'évènement E « n'être multiple d'aucun nombre premier » en fonction des A_p.
4. En utilisant l'indépendance et le théorème de continuité décroissante en déduire
$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \tag{6}$$
5. En déduire une expression de $\zeta(s)$ sous forme de produit infini.

▪ **357** ▪

Exercice 3 *(Indicatrice d'Euler).*
Soit $n > 1$ fixé. On sélectionne de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \dots, n\}$.
Pour tout entier $m \leq n$ on note A_m l'évènement m divise x, et B l'évènement x est premier avec n.

1. Exprimer B en fonction des A_p pour p diviseur premier de n
2. Pour tout m divisant n, calculer la probabilité de A_m
3. Montrer que les évènements A_p pour p premier sont mutuellement indépendants
4. En déduire la probabilité de B
5. Application : on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{7}$$

▪ **384** ▪

Exercice 4 *(Polynômes de Bernstein).*
Soit f une fonction dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$.
Soit $x \in [0,1]$. On pose X_n une suite de variid suivant une loi $B(x)$
On pose alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

1. Quelle est la loi de S_n ? Donner son espérance et sa variance.
2. Donner une expression sous forme de polynôme en x de $\mathbb{E}(f(S_n/n))$
3. Donner une inégalité majorant la probabilité que S_n/n soit éloigné de x
4. Montrer que f est uniformément continue
5. En déduire une majoration indépendante de x pour l'expression suivante

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \tag{8}$$

Indication: Découper en fonction de l'écart entre S_n/n et x

6. Conclure que la suite de polynômes donné question 2 converge uniformément vers f.
7. Comment généraliser le résultat ?

▪ 385 ▪

Exercice 5 *(Loi des grands nombres)*.
On considère une suite X_n de variid d'espérance nulle et toutes *bornées* par une constante C.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\exp\left[t(S_n - n\varepsilon)\right] \geq 1\right) + \mathbb{P}\left(\exp\left[t(S_n + -n\varepsilon)\right] \leq 1\right) \tag{9}$$
2. Montrer que pour tout $t > 0$
$$\mathbb{P}\left(\exp\left[t(S_n - n\varepsilon)\right] \geq 1\right) \leq e^{-n\varepsilon t}\left(\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right)\right)^n \tag{10}$$
3. En utilisant la convexité de l'expenentielle, montrer que pour $x \in [-C, C]$ on a
$$e^{tx} \leq u_x e^{-tC} + (1 - u_x)e^{tC} \tag{11}$$
Pour un u_x que l'on déterminera
4. En déduire
$$\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) \leq \cosh(Ct) \tag{12}$$
Indication: Où se trouve X_1 presque sûrement ?
5. Montrer l'inégalité suivante
$$\cosh t \leq e^{t^2/2} \tag{13}$$
Indication: DSE
6. En déduire une majoration de la forme
$$\mathbb{P}\left(\exp\left[t(S_n - n\varepsilon)\right] \geq 1\right) \leq e^{f(t)} \tag{14}$$
Où f dépend de C, de n et de ε.
7. Minimiser f afin d'obtenir une majoration la plus fine possible
8. En déduire
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2C^2}} \tag{15}$$
9. On pose
$$A_{n,q} = \left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \frac{1}{q}\right\} \tag{16}$$
Et
$$B_q = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_{n,q} \tag{17}$$
Montrer que $\mathbb{P}(B_q) = 0$ pour tout $p \geq 1$
10. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$
11. Que vient-on de démontrer ?

▪ 386 ▪

Exercice 6 *(Somme aléatoire)*.
On considère X_n une suite de variid à valeur dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$. On pose $Z = \sum_{n\geq 1}^{N} X_n$.

1. Quelle est la série génératrice G_X ?
2. Calculer la série génératrice G_Z
3. Dans le cas où N est constante, quelle est l'espérance de Z ? Comment généraliser cette formule ?
4. Quel est le lien entre G'_Z et l'espérance de Z ?
5. Calculer G'_Z, en déduire une formule pour l'espérance de Z si N et X ont une espérance.

▪ 387 ▪

Exercice 7 *(Moments et contrôle)*.
Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre p. Montrer

$$\mathbb{P}(X \geq n) = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \tag{18}$$

Indication: Reste de série convergente