

Fractions Rationnelles

Exercice 1 (*Calcul de sommes*).

Soit $F = \frac{1}{X(X+1)}$

1. Calculer la décomposition en éléments simples de F
2. En déduire une simplification de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad (1)$$

3. Généraliser pour calculer

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad (2)$$

Exercice 2 (*Décomposition de $1/P$*).

Soit P à racines simples x_1, \dots, x_n de degré supérieur à 2.

1. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(x_i)} = 0 \quad (3)$$

Indication: Considérer la DSE de $1/P$ en $+\infty$

2. Calculer pour $0 \leq k \leq n-1$

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{P'(x_i)} \quad (4)$$

Indication: Idem avec X^k/P

Exercice 3 (*Minoration de l'évaluation ponctuelle*).

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n et $Q = X(X-1)\cdots(X-n)$

1. Calculer la décomposition en éléments simples de P/Q .
2. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{\prod_{i \neq k} (k-i)} \quad (5)$$

3. Montrer qu'il existe un $k \in \{0, \dots, n\}$ tel que $2^n |P(k)| \geq n!$

Indication: Procéder par l'absurde... somme de binomiaux...

Exercice 4 (*Dérivées successives*).

Soit $F = \frac{1}{X^2+1}$

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C}
2. Exprimer $F^{(n)}$
3. Montrer qu'il existe P_n de degré inférieur à n et réel tel que

$$F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2+1)^{n+1}} \quad (6)$$

4. Déterminer les zéros de P_n

Exercice 5 (*Dérivées successives*).

On pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$

Réduire au même dénominateur la fraction suivante

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k} \quad (7)$$