

# Algèbre Linéaire

■ 334 ■

**Exercice 1** (*Diagonale Dominante*).

On considère une matrice  $A$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  vérifiant

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{1 \leq j \neq i \leq n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}| \quad (1)$$

1. Interpréter la formule en terme de diagonale
2. Montrer que  $A$  est inversible
3. On appelle valeur propre de  $A$  un  $\lambda$  tel que  $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$ . Montrer qu'il y a un nombre fini de valeurs propres.

*Indication: Utiliser les dimensions... Ou connaître le cours*

4. Montrer que les valeurs propres (complexes) de  $A$  sont contenues dans une union de disques dont on précisera les centres et rayons.

■ 335 ■

**Exercice 2** (*Déterminant et arithmétique*).

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$a_{i,j} = \sum_{k|i \wedge k|j} \psi(k) \quad (2)$$

1. Montrer que  $\det A = \psi(1) \dots \psi(n)$ .
2. En déduire le déterminant de la matrice où  $a_{i,j}$  est le nombre de diviseurs communs à  $i$  et  $j$
3. En déduire le déterminant de la matrice où  $a_{i,j}$  est la somme des diviseurs communs à  $i$  et  $j$
4. (Bonus) En déduire le déterminant de la matrice où  $a_{i,j} = \text{pgcd}(i, j)$

■ 336 ■

**Exercice 3** (*Somme d'automorphismes*).

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels l'espace  $E$  étant de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  non nulle.

1. Montrer que  $u$  est de rang  $r$  si et seulement si  $u = \sum_{i=1}^r \phi_i y_i$  où les  $\phi_i$  sont  $r$  formes linéaires indépendantes dans  $E^*$  et les  $y_i$  sont  $r$  vecteurs indépendants dans  $F$ .
2. Montrer que dans ce cas, on a

$$\ker u = \bigcap_{i=1}^r \ker \phi_i \quad (3)$$

3. En déduire que tout endomorphisme de  $E$  est somme de deux automorphismes (hint,  $2 \neq 0$ ).

## ■ 337 ■

**Exercice 4** (Application de Vandermonde à l'analyse).

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même. Supposons que  $f$  et  $f^{(n+1)}$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

1. Écrire l'équation de Taylor "exacte" (Taylor-Lagrange)  $f(x+h) - f(x) = \dots$
2. En appliquant cette égalité pour  $h$  égal à  $1, \dots, n$  obtenir un système matriciel carré.
3. Montrer que ce système est inversible en calculant son déterminant
4. En déduire en utilisant la norme infinie sur les matrices que toutes les dérivées  $i$ -èmes pour  $1 \leq i \leq n$  sont bornées.

## ■ 338 ■

**Exercice 5** (Déterminants de Gram).

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs de  $E$ . Soit  $n$  un entier non nul, on appelle matrice de Gram de  $x_1, \dots, x_n$  la matrice  $G(x_1, \dots, x_n)_{i,j} = \langle x_i | x_j \rangle$ .

On notera  $g(x_1, \dots, x_n)$  le déterminant de la matrice  $G(x_1, \dots, x_n)$ .

1. Montrer que  $\ker {}^tAA = \ker A$  si  $A$  est une matrice (non nécessairement carrée) de  $\mathbb{R}$

*Indication: Penser à la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique*

2. Montrer que le rang de  $G(x_1, \dots, x_n)$  est le rang de la famille  $x_1, \dots, x_n$ . On pourra utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour écrire  $G = {}^tAA\dots$
3. Soient  $F$  un sous espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $F$ . Montrer que pour tout  $x$  dans  $E$

$$d(x, F)g(x_1, \dots, x_n)^2 = g(x_1, \dots, x_n, x)^2 \quad (4)$$

*Indication: Utiliser la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ ...*

## ■ 339 ■

**Exercice 6** (Factorisation d'un endomorphisme (1)).

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  un espace de dimension finie. Montrer que

$$\ker f \subseteq \ker g \iff \exists h \in \mathcal{L}(E), g = h \circ f \quad (5)$$

## ■ 340 ■

**Exercice 7** (Factorisation d'un endomorphisme (2)).

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  un espace de dimension finie. Montrer que

$$\text{Im } g \subseteq \text{Im } f \iff \exists h \in \mathcal{L}(E), g = f \circ h \quad (6)$$

## ■ 286 ■

**Exercice 8** (Liberté dans un evn).

Soit  $E$  un espace euclidien.

- (a) Montrer que l'ensemble suivant est un ouvert de  $E^2$

$$\{(x, y) \in E \mid (x, y) \text{ libre}\} \quad (7)$$

- (b) Montrer que  $GL_n(\mathbb{R})$  est une partie ouverte de  $M_n(\mathbb{R})$ .

- (c) En déduire que si  $(A_n)$  est une suite de matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  non inversibles qui converge vers  $A$  alors  $A$  n'est pas inversible.

▪ 289 ▪

**Exercice 9** (*Continuité d'une forme linéaire*).

Soit  $E$  un espace euclidien et  $f$  une forme linéaire sur  $E$ . Montrer que  $f$  est continue si et seulement si son noyau est fermé.

*Indication: Pour le sens dur, considérer une suite de norme 1 tel que  $f(x_n) \rightarrow +\infty$  et un supplémentaire du noyau*