

---

# Groupes

---

**Exercice 1** (*Cyclicité et produit*).

Soient  $H$  et  $K$  deux groupes.

1. Si  $h$  est un élément d'ordre  $p$  dans  $H$  et  $k$  est un élément d'ordre  $q$  dans  $K$ , montrer que  $(h, k)$  est un élément d'ordre  $\text{ppcm}(p, q)$  dans  $H \times K$
2. On suppose  $H$  et  $K$  cycliques, montrer que  $H \times K$  est cyclique si et seulement si les cardinaux de  $H$  et  $K$  sont premiers entre eux.

**Exercice 2** (*Groupe opposé*).

Soit  $(G, \times, 1)$  un groupe d'ensemble sous-jacent  $X$ . On définit son groupe opposé  $(G, *, 1)$  où  $*$  est définie par  $x * y = y \times x$ .

1. Montrer que l'opposé est un groupe.
2. Soit  $\phi : (G, \times, 1) \longrightarrow (G, *, 1)$ . Est-ce un morphisme de groupes ?  

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & x \end{array}$$
3. Dans le cas où  $G$  est abélien, montrer que  $G$  et son opposé sont isomorphes.

**Exercice 3** (*Groupe des automorphismes*).

Soit  $G$  un groupe. Montrer que l'ensemble de ses automorphismes (les morphismes bijectifs de  $G$  dans  $G$ ) muni de la composition forme lui-même un groupe.

**Exercice 4** (*Existence d'un idempotent*).

Soit  $(E, \times)$  un magma associatif fini et  $a \in E$ .

1. Pourquoi l'expression  $a^k := a \times a \times \cdots \times a$  a-t-elle un sens ?
2. (a) Montrer qu'il existe  $n \geq 0$  et  $m > 0$  tel que  $a^{2^n} = a^{2^{n+m}}$ .  
 (b) Soit  $b := a^{2^n}$ . Montrer que  $b^{2^m} = b$ .  
 (c) En déduire que  $s := b^{2^m-1}$  vérifie  $s^2 = s$ . On dit alors que  $s$  est idempotent.
3. (a) Ce résultat reste-t-il vrai si on retire l'hypothèse de finitude ?  
 (b) Dans un groupe fini, a-t-on toujours un idempotent distinct du neutre ?

**Exercice 5** (*Groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini*).

1. Soit  $G$  un groupe fini. Montrer qu'il ne possède qu'un nombre fini de sous-groupes.
2. Soit  $G$  un groupe n'ayant qu'un nombre fini de sous-groupes.  
 (a) Soit  $x \in G$ . Que dire de l'ensemble suivant ?

$$E = \{ \langle x^k \rangle \mid k \in \mathbb{N}^* \}$$

- (b) En déduire que  $\langle x \rangle$  est un sous groupe fini
3. En déduire que  $G$  est fini.

**Exercice 6** (*Une loi analytique*).

Soit  $G = ]-1, 1[$ ,  $*$ ,  $0$ ) où  $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ . Montrer que  $G$  est un groupe. Est-il commutatif ?

**Exercice 7** (Sous-groupes de  $\mathbb{R}$ ).

- Donner un exemple de sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +, 0)$  dense dans  $\mathbb{R}$  et distinct de  $\mathbb{Q}$ .
- Soit  $G$  un sous-groupe non trivial de  $(\mathbb{R}, +, 0)$  et  $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ . On suppose dans cette question que  $a > 0$ .
  - Si  $a \in G$ , montrer que  $G = a\mathbb{Z}$ .  
On montrera d'abord  $a\mathbb{Z} \subseteq G$ , puis dans un second temps  $G \subseteq a\mathbb{Z}$  par l'absurde.
  - On va montrer que  $a \in G$  nécessairement. Supposons le contraire. Montrer qu'il existe  $x \in G$  tel que  $a < x \leq 2a$ . Conclure à une contradiction.
- On suppose maintenant que  $a = 0$ . Montrer que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .  
*Indication : faire des petits pas.*
- Montrer que  $\exp : (\mathbb{R}, +, 0) \rightarrow (]0, +\infty[, \times, 1)$  est un isomorphisme de groupes.  
Quelle est l'image de  $a\mathbb{Z}$  ?

**Exercice 8** (Groupe quasi-cyclique).

Soit  $p$  un nombre premier, on note

$$G_p = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}, z^{p^k} = 1 \right\}$$

- Montrer que  $G_p$  est un sous groupe de  $(\mathbb{U}, \times)$
- Soit  $H \subsetneq G_p$  un sous groupe strict
  - Montrer l'égalité suivante
 
$$G_p = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^k}$$
  - Montrer qu'il existe un  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbb{U}_{p^k} \subseteq H$  et  $\mathbb{U}_{p^{k+1}} \not\subseteq H$ .
  - Montrer que  $H = \mathbb{U}_{p^k}$
- Déduire de la question précédente que tout sous groupe propre de  $G_p$  est cyclique, et qu'aucun n'est maximal pour l'inclusion.
- Montrer que  $G_p$  n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments
- Est-ce que  $G_p$  est dense dans  $\mathbb{U}$  ?

**Exercice 9** (Introduction au produit interne).

Soit  $G$  un groupe fini,  $H, K$  deux sous groupes de  $G$ . On note  $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ .

- Montrer l'égalité suivante

$$\text{Card } HK \times \text{Card } H \cap K = \text{Card } H \times \text{Card } K$$

- En déduire une condition nécessaire pour que  $G \simeq H \times K$
- Cette condition est-elle suffisante ?

**Exercice 10** (Morphismes de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Z}$ ).

Trouver tous les morphismes de groupes de  $(\mathbb{Q}, +, 0)$  dans  $(\mathbb{Z}, +, 0)$ .

*Indication : commencer par regarder l'image.*

**Exercice 11** (*Propriété universelle du produit de groupes*).

1. Soient  $(G_1, \top, e_2)$  et  $(G_2, \perp, e_2)$  deux groupes. On définit leur produit  $(G_1 \times G_2, *, (e_1, e_2))$  où  $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 \top y_1, x_2 \perp y_2)$ . Montrer que  $G_1 \times G_2$  est un groupe.
2. On pose  $\pi_1 : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1$  et  $\pi_2 : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_2$ .  

$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_2$$
Montrer que  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont un morphismes de groupes surjectif.
3. Soit  $(H, \bullet, 1)$  un groupe et  $f_1 : H \rightarrow G$  et  $f_2 : H \rightarrow G$  deux morphismes de groupes. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes  $h : X \rightarrow G_1 \times G_2$  telle que  $\pi_1 \circ h = f_1$  et  $\pi_2 \circ h = f_2$ . On pourra raisonner par analyse-synthèse.
4. Faire un dessin de la construction. On représentera les morphismes  $\pi_1, \pi_2, f_1, f_2$  et  $h$  par des flèches entre les groupes  $G_1, G_2, G_1 \times G_2$  et  $H$ .

**Exercice 12** (*Sous groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$* ).

1. Rappeler la classification des sous-groupes de  $\mathbb{Z}$
2. On note  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  la projection canonique qui à  $k \in \mathbb{Z}$  associe  $k \bmod n$ . Montrer que  $\pi$  est un morphisme de groupes surjectif
3. Soit  $H$  un sous groupe de  $\mathbb{Z}$ , que dire de  $\pi(H)$  ?
4. Soit  $K$  un sous groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , que dire de  $\pi^{-1}(H)$  ?
5. Conclure sur la forme des sous groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
6. En déduire le nombre de sous-groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Exercice 13** (*Signature*).

Soit  $n \geq 2$ , déterminer les morphismes de groupes de  $(\mathfrak{S}_n, \circ)$  vers  $(\mathbb{C}^*, \times)$

**Exercice 14** (*Nombres dyadiques*).

Soit  $A = \{m2^{-n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ .

1. Montrer que  $A$  est un sous anneau de  $(\mathbb{Q}, +, \times)$ .
2. Quels sont les éléments inversibles de  $A$  ?

————— À donner si le candidat est bon —————

3. Comparer l'idéal engendré par  $m2^{-n}$  et  $m$
4. En déduire la forme des idéaux de  $A$