Suites numériques

Exercice 1 *().*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1. Établir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x}$$

   En déduire la limite de (S_n).
2. Établir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).

Exercice 2 *(Règle de Leibniz).*

1. Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels positifs décroissante et tendant vers 0. Pour $n \geq 0$ on pose $A_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
   (a) Montrer que $(A_{2n})_{n\geq 0}$ et $(A_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que $(A_n)_{n\geq 0}$ converge.
2. Quelle est la nature de $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \right)_{n\geq 0}$?

Exercice 3 *(Discriminant).*
Soit (u_n) une suite de nombre strictement positifs qui vérifie :

$$u_n + \frac{1}{u_n} \to 2$$

Calculer la limite de u_n *Indication : solution d'une équation de degré 2...*

Exercice 4 *().*
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq b \\ u_n + v_n \to a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Exercice 5 *().*
Terme général de $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n$.

Exercice 6 *()*.
Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 7 *(Règle de comparaison logarithmique pour les suites)*.
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. On suppose que $(v_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0. Que dire de $(u_n)_{n\geq 0}$? *Indication : télescopage.*
2. Que se passe-t-il si $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$?

Exercice 8 *()*.
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, $\lambda > 0$ et $u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_n u_{n+1}}$.
Expliciter le n-ème terme de u_n
Indication : log

Exercice 9 *()*.
Soit (u_n) une suite positive définie par $u_0 < 1$, $u_{n+1} = \sqrt{(1 + u_n)/2}$. Montrer que la suite (v_n) définie comme suit converge :

$$v_n = \prod_{i=0}^{n} u_n$$

Indication : $2^n \sin(\theta/2^n)$ *- attention à l'équivalent*

Exercice 10 *(Suites adjacentes, à l'envers)*.
Soit $0 < v_0 < u_0$, on définit par récurrence pour $n > 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont bien définies et que $\forall n \geq 0$, $u_n \geq v_n$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$ et de $(v_n)_{n\geq 0}$. En déduire que ces suites ont des limites U et V.
3. Montrer que $U = V$. Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ étaient-elles adjacentes ?

Exercice 11 *(Suites convergentes vers les irrationnels)*.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers convergente. Montrer qu'elle est stationnaire.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}$ Monter qu'il existe une suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\geq 0}$ de limite x telle que $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$.
3. On suppose que $q_n \not\to +\infty$.
   (a) Montrer qu'il existe une sous-suite $(q_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui est bornée. En déduire qu'il existe une sous-suite $(q_{\psi(n)})_{n\geq 0}$ stationnaire.
   (b) Montrer que $\left(\frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}} \times q_{\psi(n)}\right)_{n\geq 0}$ est stationnaire.
   (c) Conclure à une contradiction.
4. On sait maintenant que $q_n \to +\infty$. On suppose que $p_n \not\to +\infty$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\left(\frac{p_{\nu(n)}}{q_{\nu(n)}}\right)_{n\geq 0}$ tendant vers 0, puis conclure à une contradiction.

Exercice 12 *(Complétude de $\mathbb{R}$)*.
Une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall m, n \geq n_0$, $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle convergente. Montrer qu'elle est de Cauchy.
2. On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.
   (b) En déduire qu'elle possède une sous-suite convergente vers une limite l. En réutilisant la propriété de Cauchy, montrer que $u_n \to l$.
3. Ces résultats restent-ils vrais dans $\mathbb{C}$?

Exercice 13 *(Lemme de Cesàro)*.
Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite réelle convergente vers une limite finie l. On souhaite montrer que la suite $S_n := \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge également vers l.

1. Montrer que pour tout $n \geq m \geq 0$ on a :
$$\left|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - l\right| \leq \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{m-1} |u_k - l|\right) + \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=m}^{n} |u_k - l|\right)$$
2. On fixe à partir dans cette question et la suivante $\varepsilon > 0$.
   (a) Pourquoi existe-t-il $m \geq 0$ tel que $\forall k \geq m$, $|u_k - l| \leq \varepsilon/2$?
   (b) En déduire que pour tout $n \geq m$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=m}^{n} |u_k - l| \leq \varepsilon/2$.
3. m étant fixé, monter qu'il existe $n_0 \geq m$ tel si $n \geq n_0$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{m-1} |u_k - l| \leq \varepsilon/2$.
4. Déduire de ce qui précède la convergence de $(S_n)_{n\geq 0}$.
5. A-t-on la réciproque de ce résultat ?

Exercice 14 *(Extraction diagonale)*.
On suppose que pour tout $k \geq 0$, $u^k := (u^k_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle bornée.

1. D'après quel théorème existe-t-il une sous-suite $\left(u^0_{\varphi_0(n)}\right)_{n\geq 0}$ convergente ?
2. Construire par récurrence une suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ d'extractrices telle que :
   - $\forall k \geq 0$, il existe une extractrice ψ_k telle que $\varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \psi_k$;
   - $\forall k \geq 0$, $\forall 1 \leq i \leq k$, $\left(u^i_{\varphi_k(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge.
3. Montrer que $\varphi : k \mapsto \varphi_k(k)$ est une extractrice et que $\forall k \geq 0$, $\left(u^k_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge.