

OD2 d'ordre 2 / Dérivabilité

Exercice 1 (*Roll'N'Roll*).

Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a, b[$ s'annulant en $n + 1$ points de $]a, b[$.
Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 2 (*Rolle aux limites*). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que f a pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$.
Montrer qu'il existe un c tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 3 (*TAF et Lipschitzianité (1386)*).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée sur I est bornée.

Exercice 4 (*TAF et équivalents (267)*).

Démontrer

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2} \quad (1)$$

Exercice 5 ().

- Établir que pour $x \in]0, +\infty[$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$$

- En déduire que pour $x \in]0, +\infty[$ on a

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+x}$$

Exercice 6 ().

On pose $g(x) = e^{-1/x^2}$.

- Étudier le domaine de définition de g
- Montrer que l'on peut prolonger g en 0
- Montrer par récurrence sur n l'équation suivante (où P_n est un polynôme dont on explicitera le degré)

$$g^{(n)}(x) = x^{-3n} P_n(x) f(x)$$

- Montrer que f est C^∞ , et que toutes ses dérivées sont nulles en zéro
- Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles (*Indication : Roll'N'Roll*)

Exercice 7 (*Périodicité*). Soit ϕ une fonction continue T -périodique sur \mathbb{R} . Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer toutes les solutions périodiques de l'équation $y' - ay = \phi$.

Exercice 8 (*Zéros isolés*).

Montrer que si f est une solution non nulle de $y'' + q(x)y = 0$ alors ses zéros sont isolés.

Exercice 9 ().

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \sin(2t)$.

Exercice 10 (*Régime forcé*).

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 t)$.

Exercice 11 ().

Résoudre en utilisant la méthode d'abaissement de l'ordre ($y(x) = z(x)e^{rx}$) l'équation suivante :

$$y''(x) + 4y(x) = \frac{1}{\cos 2x}$$

Exercice 12 (). Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x)$.

Indication : si f est vérifie l'équation, elle est solution d'une ED d'ordre 2.

Exercice 13 ().

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

Indication : si f est vérifie l'équation, elle est solution d'une ED d'ordre 2.

Exercice 14 (*Résolution générique*).

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche à résoudre $y'' + y = g$.

1. On pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$$

(a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)dt$.

Indication : on se souviendra que $\sin(x-t) = \dots$.

(b) Montrer que f est deux fois dérivable et qu'elle vérifie $f'' + f = g$.

2. Résoudre $y'' + y = g$, en exprimant les solutions en fonction de f .

3. Application. Quelles sont les solutions si $g(t) = \cos(t) \sin(t)$?

Exercice 15 (*Equation d'Euler*).

On cherche les $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables, telles que $f'(t) = f(1/t)$ pour tout $t > 0$ (E).

1. Montrer que si f vérifie (E), alors elle est infiniment dérivable.

2. Montrer que si f vérifie (E), alors f est solution de $t^2 y'' + y = 0$ (H).

3. Montrer que si f est solution de (H), alors $g := f \circ \exp$ vérifie une équation linéaire d'ordre 2 (H') que l'on précisera.

4. Résoudre (H') puis conclure.

Exercice 16 (*Une équation de Bernoulli*).

On cherche les solutions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de $y' = y + \sqrt{y}$ (B).

1. Montrer si f est solution de (B), alors \sqrt{f} est solution de $2y' = y + 1$ (E).

2. Résoudre (E) et conclure.