

Continuité / Limites et comparaisons de fonctions

Exercice 1 (Équivalent de suite numériques (2281)).

Trouver un équivalent simple aux suites suivantes

(a) $u_n = (n + 3 \ln n)e^{-(n+1)}$

(b) $u_n = \frac{\ln n^2 + 1}{n+1}$

Exercice 2 (Factorielles (02284)).

On pose $u_n = \sum_{k=0}^n k!$, montrer que $u_n \sim n!$

Exercice 3 (Limites de fonctions (00705)).

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes

(a) $\frac{x^{\ln x}}{\ln x}$

(b) $\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}$

(c) $\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x}$

Exercice 4 (Limites de fonctions (01822)).

Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes

(a) $\frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x}$

(b) $\frac{x \ln x - x}{x + \cos x}$

(c) $\frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$

Exercice 5 (Suite et Lipschitzianité (01822)).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lip avec $k < 1$ vérifiant $f(0) = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \tag{1}$$

Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 6 (Étude asymptotique (1824)).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante qui vérifie

$$f(x) + f(x+1) \sim_{\infty} \frac{1}{x} \tag{2}$$

(a) Montrer que $f(x) \rightarrow 0$

(b) Donner un équivalent de f en $+\infty$