Intégrales / Suites de fonctions / EVN

Question de cours

1 Intégrale d'une limite uniforme
2 Théorème de dérivation C^1
3 Lip parmis les fonctions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$

1 Intégrales

Exercice 1 *(Comportement d'une fonction intégrable (3232)).*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et *décroissante*. On suppose que f est intégrable. Montrer que $f = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Indication: Encadrer $xf(x)$ par deux intégrales

Exercice 2 *(Calcul d'intégrale (683)).*
Existence et valeur pour $a > 0$ de

$$I(a) = \int_0^\infty \sin(t)e^{-at}dt \tag{1}$$

Indication: Complexes

Exercice 3 *(Fonction Γ (2537)).*
On pose

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{2}$$

(a) Donner le domaine de définition de Γ

(b) Calculer

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \tag{3}$$

Indication: Faire n IPP ...

(c) Justifier l'égalité suivante

$$\Gamma(x) = \lim \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{4}$$

Indication: Convergence dominée

(d) En déduire une expression de $\Gamma(n+1)$ quand $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 *(Bébé Laplace/Phase).*

(a) Trouver un équivalent en $+\infty$ de

$$f(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x^2} dx \tag{5}$$

Indication: Justifier la convergence de $\int_0^\infty e^{ix^2} dx$ via une IPP.

Indication: Admettre que la constante obtenue est non nulle

(b) On considère $I = [a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$, continue en a telle que $f(a) \neq 0$.
On pose

$$F(\lambda) = \int_I e^{-\lambda x^2} f(x) dx \tag{6}$$

On suppose que pour $\lambda \geq \lambda_0$ on a $F(\lambda)$ qui converge absolument, c'est-à-dire que $e^{-\lambda x^2} f(x)$ est intégrable.
Donner un équivalent de F quand $\lambda \to \infty$.

(c) (bonus) Que faire si on remplace x^2 par une fonction ϕ vérifiant $\phi' > 0$, $\phi'(a) = 0$, $\phi''(a) > 0$?

Exercice 5 *(Série d'intégrales (1102)).*
On pose

$$U_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n} \qquad V_n = \int_1^\infty \frac{dt}{(1+t^3)^n} \tag{7}$$

(a) Donner les limites éventuelles des suites U_n et V_n

(b) Étudier la nature des séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$.

Indication: Pour U_n, par l'absurde et Fubini

Exercice 6 *(Inégalité d'intégrales (3443)).*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f(0) = 0$. Établir

$$\forall x > 0, \int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt \leq 2 \int_0^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt \tag{8}$$

en justifiant l'existence des intégrales écrites.

Indication: Taux d'accroissement. IPP.

2 Suites de fonctions

Exercice 7 *(Convergence d'une série de fonction).*
Étudier la convergence de la série suivante sur $[0, 1]$.

$$\sum_{k \leq n} \frac{x}{(1+x)^k} \tag{9}$$

Exercice 8 *(Convergence uniforme bis).*
Étudier la convergence de la suite de fonction suivante sur $[-1, 1]$.

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \tag{10}$$

Indication: Étude de fonction ...

Exercice 9 *(Valeurs propres d'un opérateur (FGN1)).*

(a) Déterminer toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{3^n} \tag{11}$$

(b) Même question en remplaçant 3 par 2

Indication: Considérer $a \in]0,1[$ et b qui atteint le maximum de f sur $[0,a]$...

(c) Même question avec $c \in]0,1[$ et

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n} \tag{12}$$

(d) (bonus) Peut-on adapter au cas où $c = 2$?

Exercice 10 *(Critère d'équirépartition de Weil (FGN2)).*
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[0,1]$. Pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$ on note

$$X_n(a,b) = \left|u^{-1}([a,b])\right| = |\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a,b]\}| \tag{13}$$

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. La suite u_n est équirépartie, ie

$$\forall 0 \leq a \leq b \leq 1, \frac{X_n(a,b)}{n} \to b - a \tag{14}$$

2. Pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \to \int_0^1 f(t)dt \tag{15}$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \to 0 \tag{16}$$

Exercice 11 *(Théorème de Dini).*
Soit (f_n) une suite de fonctions *croissantes* sur $[a,b]$ telles que f_n converge simplement vers une fonction f *continue*.
Montrer que la convergence est uniforme.

Indication: Que dire de f ? Fixer une subdivision...

3 Espaces vectoriels normés

Exercice 12 *(Égalité triangulaire).*
Soit E un espace euclidien et $f : [a,b] \to E$ une fonction continue.
On suppose que

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| = \int_a^b \|f(x)\|dx \tag{17}$$

Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que on ait pour tout $t \in [a,b]$ on ait $f(t) = \|f(t)\| \cdot e$.

Exercice 13 *(Séries et convergence)*.
Soit E un espace vectoriel normé.
Une suite (u_n) est dite de Cauchy dans E si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq m, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon \tag{18}$$

On dit que E est complet si toute suite de Cauchy de E possède une limite dans E.

1. Montrer que E est un espace complet si et seulement si toute série de E qui converge normalement possède une limite.
2. Donner un exemple d'espace non complet (penser aux espaces de fonction).