Trigonométrie

Question de cours

1 Etude de la fonction Arcsin
2 Etude de la fonction Arccos
3 Etude de la fonction Arctan

Exercice 1 *()*.
Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 1$ on a $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan \dfrac{a+b}{1-ab} + k\pi$ avec $k \in \{-1, 0, 1\}$.

Exercice 2 *(Formule de Machin)*.

1. Soit $\theta = \arctan \frac{1}{5}$, calculer $\tan(2\theta)$, $\tan(4\theta)$ et $\tan(4\theta - \frac{\pi}{4})$.
2. Justifier que $\arctan(\tan(4\theta - \frac{\pi}{4})) = 4\theta - \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire que $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239}$.

Exercice 3 *()*.
Étudier et tracer la fonction $f : x \mapsto \arcsin \sin x + \arccos \cos x$.

Exercice 4 *(Inégalité de Huygens)*.

1. Montrer que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $x \leq \frac{2}{3} \sin(x) + \frac{1}{3} \tan(x)$.
2. Interpréter cette inégalité géométriquement.

Exercice 5 *()*.

1. Montrer que pour $x \neq 0$ on a $\dfrac{1}{\text{sh}(x)} = \dfrac{1}{\text{th}(x/2)} - \dfrac{1}{\text{th}(x)}$.
2. En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\text{sh}(2^k x)}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6 *()*.
Justifier que $\arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ est défini pour $x \in \mathbb{R}$, puis simplifier l'expression.

Exercice 7 *()*.
Justifier que $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est défini pour $x \in \mathbb{R}$, puis simplifier l'expression.