Intégrales et suites de fonctions

Question de cours

ABID	Exercice 9
JOLY	Exercice 11
SEGOVIA	Exercice 12

Exercice 1 *(Convergence uniforme).*
Étudier la convergence uniforme des fonctions suivantes sur $[0, 1]$.

(a)

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x} \tag{1}$$

Indication: Majorations brutales

(b)

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + xn} \tag{2}$$

Indication: Appliquer en $1/(1 + n)$

Exercice 2 *(Convergence d'une série de fonction).*
Étudier la convergence de la série suivante sur $[0, 1]$.

$$\sum_{k \leq n} \frac{x}{(1 + x)^k} \tag{3}$$

Exercice 3 *(Convergence uniforme bis).*
Étudier la convergence de la suite de fonction suivante sur $[-1, 1]$.

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \tag{4}$$

Indication: Étude de fonction ...

Exercice 4 *(Bébé Laplace/Phase).*

(a) Trouver un équivalent en $+\infty$ de

$$f(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x^2} dx \tag{5}$$

Indication: Justifier la convergence de $\int_0^\infty e^{ix^2} dx$ *via une IPP.*

Indication: Admettre que la constante obtenue est non nulle

(b) On considère $I = [a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$, continue en a telle que $f(a) \neq 0$.
On pose

$$F(\lambda) = \int_I e^{-\lambda x^2} f(x) dx \tag{6}$$

On suppose que pour $\lambda \geq \lambda_0$ on a $F(\lambda)$ qui converge absolument, c'est-à-dire que $e^{-\lambda x^2} f(x)$ est intégrable.
Donner un équivalent de F quand $\lambda \to \infty$.

(c) (bonus) Que faire si on remplace x^2 par une fonction ϕ vérifiant $\phi' > 0$, $\phi'(a) = 0$, $\phi''(a) > 0$?

Exercice 5 *(Série d'intégrales (1102)).*
On pose

$$U_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n} \qquad V_n = \int_1^\infty \frac{dt}{(1+t^3)^n} \tag{7}$$

(a) Donner les limites éventuelles des suites U_n et V_n

(b) Étudier la nature des séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$.

Indication: Pour U_n, par l'absurde et Fubini

Exercice 6 *(Fonction Γ (2537)).*
On pose

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{8}$$

(a) Donner le domaine de définition de Γ

(b) Calculer

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \tag{9}$$

Indication: Faire n IPP ...

(c) Justifier l'égalité suivante

$$\Gamma(x) = \lim \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{10}$$

Indication: Convergence dominée

(d) En déduire une expression de $\Gamma(n+1)$ quand $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 *(Calcul d'intégrale (683)).*
Existence et valeur pour $a > 0$ de

$$I(a) = \int_0^\infty \sin(t) e^{-at} dt \tag{11}$$

Indication: Complexes

Exercice 8 *(Comportement d'une fonction intégrable (3232)).*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et *décroissante*. On suppose que f est intégrable. Montrer que $f = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Indication: Encadrer $xf(x)$ par deux intégrales

Exercice 9 *(Inégalité d'intégrales (3443)).*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f(0) = 0$. Établir

$$\forall x > 0, \int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt \leq 2 \int_0^x \frac{f(t)f'(t)}{t} dt \tag{12}$$

en justifiant l'existence des intégrales écrites.

Indication: Taux d'accroissement. IPP.