
Fonctions réelles et complexes

— Question de cours —

BERTOLI	Dérivabilité de $\exp(f(x))$ et $(x - a)^n$
GRANDCHAMP	Pour $b \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ $1/(x - b)$ est dérivable
HARDY	Théorème de Leibnitz

Exercice 1 ().

1. Rappeler la formule reliant $\sin(2x)$ avec $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. Soit $x \in]0, \pi[$, simplifier $P = \prod_{k=0}^n \cos(2^k x)$ (on commencera par calculer $\sin(x) \times P$).

Exercice 2 ().

Soit $Z \in \mathbb{C}$, résoudre dans \mathbb{C} l'équation $e^z = Z$ d'inconnue Z .

Exercice 3 ().

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\forall z \in \mathbb{C} = f(z) + if(\bar{z}) = 2i$.

Exercice 4 ().

Soient z et z' deux nombres complexes de module 1. Montrer que $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est un réel (quand il est défini).

Exercice 5 (). Calculer les sommes suivantes pour $n \geq 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\sum_{k=0}^n \sin(\alpha + k\beta)$ et $\sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\beta)$.
2. $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \sin(\alpha + k\beta)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \cos(\alpha + k\beta)$.
3. $\sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(\alpha + k\beta)$ et $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(\alpha + k\beta)$.
4. $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \operatorname{sh}(\alpha + k\beta)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \operatorname{ch}(\alpha + k\beta)$.

Exercice 6 ().

Soit $n \geq 1$. Trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z - 1)^n = (z + 1)^n$.

Exercice 7 ().

On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -èmes de l'unité dans \mathbb{C} .

1. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$
2. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |1 - \omega|$

Exercice 8 (*Un peu plus de j*).

On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. On considère les trois somme suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0 \wedge k \equiv 0[3]}^n \binom{n}{k}$$

$$B_n = \sum_{k=0 \wedge k \equiv 1[3]}^n \binom{n}{k}$$

$$C_n = \sum_{k=0 \wedge k \equiv 2[3]}^n \binom{n}{k}$$

1. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k$
2. Montrer que $S_n = A_n + jB_n + j^2C_n$
3. En déduire que $\overline{S_n} = A_n + j^2B_n + jC_n$
4. Calculer $A_n + B_n + C_n$
5. En déduire une expression de A_n, B_n et C_n

Exercice 9 (*Racines primitives de l'unité*).

1. Soit $z \in \mathbb{U}_n$, montrer que $\{z^k \mid k \geq 0\} \subseteq \mathbb{U}_n$.
2. On dit que $z \in \mathbb{U}_n$ est une racine *primitive* dans \mathbb{U}_n si $\{z^k \mid k \geq 0\} = \mathbb{U}_n$. Quelles sont les racines primitives dans $\mathbb{U}_1 ? \mathbb{U}_2 ? \mathbb{U}_3 ? \mathbb{U}_4 ?$
3. Montrer que si $z \in \mathbb{U}_n$ alors $\{z^k \mid k \geq 0\} = \{z^k \mid 0 \leq k < n\}$.
4. Soit $z \in \mathbb{U}_n$ telle qu'il existe $0 < k < n$ avec $z^k = 1$. Montrer que z n'est pas primitive dans \mathbb{U}_n .
Indication : compter le nombre d'éléments de $\{z^k \mid 0 \leq k < n\}$.
5. Supposons maintenant que $z \in \mathbb{U}_n$ n'est pas primitive dans \mathbb{U}_n .
 - (a) Montrer qu'il existe $0 \leq i \neq j < n$ tels que $z^i = z^j$.
 - (b) En déduire qu'il existe $0 < k < n$ tel que $z^k = 1$.
6. Conclure que $z \in \mathbb{U}_n$ est primitive dans \mathbb{U}_n si, et seulement si, $\forall k < n, z \notin \mathbb{U}_k$.

Exercice 10 (*Formule de Leibniz et application*).

1. Soient f et g deux fonctions réelles n fois dérivables. Montrer par récurrence que $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.
2. (a) Calculer la dérivée n -ème de $f : x \mapsto x^{2n}$.
(b) En écrivant $x^{2n} = x^n \times x^n$, exprimer la dérivée n -ème de f sous une autre forme.
(c) En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 11 ().

1. Donner un exemple *simple* de fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vérifiant $\forall x, f(x^2) = f(x)$.
2. Soit $A = \{e^{-2^n \ln(2)} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
 - (a) Justifier que $A \subseteq [0, 1]$.
 - (b) Montrer que si $x \in A$, alors $x^2 \in A$.
 - (c) Montrer que si $x \in [0, 1] \setminus A$, alors $x^2 \in [0, 1] \setminus A$.
3. En déduire une fonction *non constante* $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vérifiant $\forall x, f(x^2) = f(x)$.

Exercice 12 (*Fonction constante*).

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels de $[0, 1]$ de limite 1.

Déterminer les fonctions f continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(u_n x + 1 - x)}{2^n} \quad (1)$$

Indication: Considérer le minimum de f , puis le maximum de f