Familles sommables et intégrales généralisées

Question de cours

BAI	Exercice 29
BERTHY	Exercice 5
DUMAS	Exercice 26

Exercice 1 *($l^1(\mathbb{Z})$).*
On note $l^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sommables.

(a) Soit $(u,v) \in l^1$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable

(b) Sous les mêmes hypothèses, on pose $(u \star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u \star v)_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right) \tag{1}$$

(c) Montrer que $\star$ est commutative, associative et possède un neutre

(d) Est-ce que cela permet de munir l^1 d'une loi de groupe ?

Exercice 2 *(Convergence commutative).*
On se place dans $\mathbb{R}$.

(a) Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente, $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. Montrer que $\sum u_{\sigma n}$ converge absolument vers la même valeur.

(b) Soit u_n telle que $\sum u_n$ est semi convergente. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe une permutation σ telle que $\sum u_{\sigma n} \to a$.

Exercice 3 *(Calcul d'une somme).*
Établir la convergence et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 n + n^2 m + 2m} \tag{2}$$

Exercice 4 *(Somme de permutation).* Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2} \tag{3}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)} \tag{4}$$

Exercice 5 *(Intégrabilité).*

(a) Étudier l'intégrabilité sur $]1;+\infty[$ de

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \tag{5}$$

(b) Montrer

$$\int_2^3 f(t)dt \leq \frac{\ln 2}{3} \tag{6}$$

Exercice 6 *(Bébé Laplace/Phase).*

(a) Trouver un équivalent en $+\infty$ de

$$f(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x^2} dx \tag{7}$$

(b) On considère $I = [a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$, continue en a telle que $f(a) \neq 0$.
On pose

$$F(\lambda) = \int_I e^{-\lambda x^2} f(x) dx \tag{8}$$

On suppose que pour $\lambda \geq \lambda_0$ on a $F(\lambda)$ qui converge absolument, c'est-à-dire que $e^{-\lambda x^2} f(x)$ est intégrable.
Donner un équivalent de F quand $\lambda \to \infty$.

(c) (bonus) Que faire si on remplace x^2 par une fonction ϕ vérifiant $\phi' > 0$, $\phi'(a) = 0$, $\phi''(a) > 0$?

Exercice 7 *(Limite d'une intégrale).*
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f est intégrable.
Calculer l tel que

$$\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \to l \tag{9}$$

Exercice 8 *(Produit de Dirichlet).*
Soient deux suivets réelles u, v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ on définit

$$(u \star v)_n = \sum_{ab=n} u_a v_b \tag{10}$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, +, \star)$ est un anneau unitaire
2. Déterminer les éléments inversibles de cet anneau
3. Supposons que u et v définissent des séries absolument convergentes. Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} (u \star v)_n = \left(\sum_{n \geq 1} u_n \right) \left(\sum_{n \geq 1} v_n \right) \tag{11}$$

Exercice 9 *(Comparaison asymptotique).*
La fonction $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ qui à n associe 0 si n possède un facteur carré, 1 si $n = 1$, $(-1)^r$ si n possède r facteurs premiers distincts.
On considère

$$r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \tag{12}$$

(a) Montrer que r_n possède une limite égale à celle de s_n définie comme suit

$$s_n = \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \tag{13}$$

(b) Calculer le produit suivant

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^2} \right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \right) \tag{14}$$

Indication: Inversion de möbius, en utilisant un binôme de newton

(c) En déduire la valeur de la limite de r_n.