Fonctions réelles

Question de cours

PEILLERON	Paire / Impaire / Périodique
VARESE	f croissante majorée admet une limite à gauche
WAWSZCZYK	f continue implique $f(I)$ est un intervalle si I est un intervalle

Exercice 1 *()*. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Prouver l'unicité de cette écriture.

Exercice 2 *()*.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique pour tout $T \geq 0$. Montrer qu'elle est constante. (Une fonction f est dite T-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(T + x)$).

Exercice 3 *()*.

1. Donner un exemple *simple* de fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $\forall x, f(x^2) = f(x)$.
2. Soit $A = \left\{ \mathrm{e}^{-2^n \ln(2)} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$.
   (a) Justifier que $A \subseteq [0,1]$.
   (b) Montrer que si $x \in A$, alors $x^2 \in A$.
   (c) Montrer que si $x \in [0,1] \setminus A$, alors $x^2 \in [0,1] \setminus A$.
3. En déduire une fonction *non constante* $f : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $\forall x, f(x^2) = f(x)$.

Exercice 4 *()*.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\begin{array}{rccc} g : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sup_{t \in [0,x]} f(t) \end{array}$.
Montrer que g est croissante et continue.

Exercice 5 *()*.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que si $x \leq y$ sont des rationnels alors $f(x) \leq f(y)$. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *(Périodique n'a pas de limite)*.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite en $+\infty$.
Montrer que f est constante.

Exercice 7 *()*.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $p, q \in \mathbb{R}_+$, montrer qu'il existe un $c \in [a;b]$ tel que

$$pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$$

Exercice 8 *(Isobarycentre des images)*.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_1 \dots x_n$ des réels.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.
Indication : encadrer la valeur que l'on veut atteindre.

Exercice 9 *()*.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 10 *()*.
Soit $f : [0; +\infty] \to \mathbb{R}_+$ continue et qui vérifie

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} l < 1$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 11 *(Point fixe itéré)*.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f^n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

1. Si f admet un point fixe, est-ce le cas de f^n ?
2. On suppose que f^n possède un unique point fixe. Montrer que f possède un point fixe, et qu'il est unique. *Indication : considérer $f(y)$ si y est le point fixe de f^n.*
3. On suppose dans la suite que f^n possède un point fixe y, pas nécessairement unique. On va montrer que f possède quand même un point fixe. Soit $\phi : x \mapsto f(x) - x$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(y)) = 0$.
   (b) En déduire que ϕ change de signe (au sens large) et conclure.
4. Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant un unique point fixe, telle que f^2 ait strictement plus d'un point fixe.

Exercice 12 *(Théorème de Knaster-Tarski)*.
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante. On va montrer que f possède un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = a$. Soit $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$.

1. Montrer que A n'est pas vide.
2. Montrer que si $x \in A$, alors $f(x) \in A$.
3. Soit $a = \inf A$. Montrer que $\forall x \in A, f(a) \leq x$. En déduire que $f(a) \leq a$.
4. Montrer que $a \leq f(a)$ et conclure.

Exercice 13 *(Équation fonctionnelle)*.
Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$$

Exercice 14 *()*.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $f \circ f = \mathrm{id}$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. En déduire que $f = \mathrm{id}$ *Indication : montrer que $f(x) > x$ ou $f(x) < x$ est impossible.*

Exercice 15 *(Equation fonctionnelle de la moyenne)*.
On cherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

1. Soit f une fonction de la forme précédente. On suppose de plus $f(0) = f(1) = 0$.
   (a) Montrer que $f(2x) = 2f(x)$.
   (b) Montrer que f est 2-périodique. *On pensera à utiliser les symétries autour de* 0 *et* 1.
   (c) En remarquant que f doit être bornée, conclure que f est nulle.
2. Que dire dans le cas général ? *Indication : comment se ramener au cas précédent ?*