Séries Complexes

Question de cours

BAKTACHE	Exercice 7
BEJA BATTAIS	Exercice 8
DELAIR	Exercice 43

Exercice 1 *(Développement asymptotique d'une suite récurrente).*
On pose (u_n) avec $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \tag{1}$$

(a) Quelle est la limite de u_n ?

(b) Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2$ possède une limite finie

(c) En déduire un équivalent de u_n

Exercice 2 *(DA d'une suite récurrente (dur)).*
On pose (u_n) avec $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \tag{2}$$

(a) Quelle est la limite de u_n ?

(b) On pose $v_n = e^{u_n}$. Quelle est l'équation de récurrence de v_n ?

(c) Que dire de v_n ? (signe, limite...)

(d) En déduire une écriture de v_{n+1} de la forme $X + o(1/v_n)$

(e) Utiliser ceci pour calculer la limite de $v_{n+1} - v_n$

(f) En déduire que $v_n \sim n$

(g) Conclure sur un développement asymptotique de v_n à deux termes, puis sur un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Exercice 3 *(Suite définie implicitement).*
On pose $P_n = X^{2n} - 2nX + 1$ et a_n la plus grande racine réelle de P_n.

(a) Justifier l'existence de a_n

(b) Encadrer a_n

(c) En déduire un équivalent à deux termes de a_n

Exercice 4 *(Nature d'une série).*
Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}\right) \tag{3}$$

Exercice 5 *(Équivalent de la factorielle).*
On pose u_n comme suit

$$u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\frac{1}{n!} \tag{4}$$

Et $v_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$

(a) Quelle est la nature de $\sum v_n$?

(b) En déduire un équivalent de $n!$ dépendant d'une constante K fixée.

Exercice 6 *(Comparaison de convergence).*
Soit (u_n) une suite positive et $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$. On souhaite comparer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

(a) En utilisant $u_n = 1$ et $u_n = n$ conclure dans le cas où $\sum u_n$ diverge

(b) Supposons que u_n converge. Trouver une condition pour que $\sum v_n$ converge.

Exercice 7 *(Développements asymptotiques).*
Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes

(a) $(1+\sqrt{1+x^2})^{1/2}$

(b) $\log(\sin(x)/x)$

(c) $(1+2x)^{1/(1+x)}$

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 4 en 1 de la fonction suivante

$$x^{-\frac{1}{-1+\ln x}} \tag{5}$$

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction suivante

$$\left(\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right)\ln x \tag{6}$$

Exercice 8 *(Nature d'une série).*

(a) Sous quelle condition une série de terme général $1/(n^\alpha(\ln n)^\beta$ converge-t-elle ?

(b) Quelle est la nature de la série suivante

$$\sum \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln n \ln(n+2)}\right) \tag{7}$$

(c) Calculer explicitement cette somme

Exercice 9 *(Transformation d'Abel).*
On considère α_n une suite positive, décroissante tendant vers zéro, et v_n dont les sommes partielles sont bornées par une constante M.
On désire montrer que $\sum \alpha_n v_n$ converge.

(a) Indication : considérer $S_n = \sum_{k=0}^n v_n$

(b) Indication : convergence absolue ?

(c) Application : retrouver le critère spécial

(d) Application : quelle est la nature de la série

$$\sum \alpha_n e^{in\theta} \tag{8}$$

Avec $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ et α_n satisfaisant les hypothèses du théorème ?

Exercice 10 *(Série d'une fonction).* Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 vérifiant

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \to -\infty \tag{9}$$

(a) Montrer que $\sum f(n)$ converge

Indication: $\log$ *et intégration ...*

(b) Donner un équivalent du reste

Indication: $R_n = f(n) + R_{n+1}$ *et* $R_{n+1} = o(f(n))$

Exercice 11 *(Développement asymptotique d'une suite récurrente).*
Soit $c > 0$, $a > 0$, $\alpha > 1$, et $f : [0, c] \to [0, c]$ continue telle que

$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha) \tag{10}$$

(a) Montrer que pour u_0 assez petit la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers zéro

(b) Déterminer un équivalent de u_n

(c) Appliquer cet exercice à $f(x) = \ln(1 + x)$

(d) Déterminer un développement asymptotique à l'ordre suivant dans ce cas particulier