Analyse Asymptotique
Matrices

Question de cours

Chamberlin	Propriétés de la valeur absolue (enoncé + justification
Chamberlin	Convexe non vide borné de $\mathbb{R}$ est un intervalle
Chamberlin	Inégalité triangulaire complexe (maj/min)
Chamberlin	Symétrie des coefficients binomiaux + triangle de pascal
Chamberlin	Binôme de Newton

1 Logique

1.1 Élémentaire

Exercice 1 *()*.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. A-t-on toujours $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$? Donner la négation de cette formule. Que dire des fonctions qui vérifient $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$?

Exercice 2 *(Sous-structures)*.
On se donne une proposition $P(x)$ dépendante d'un réel x.

1. Soit $X \subseteq \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in H, P(x)$. Soit $I \subseteq H$, montrer que $\forall x \in I, P(x)$.
2. Soit $J \subseteq \mathbb{R}$ telle que $\exists x \in H, P(x)$. Soit $J \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$, montrer que $\exists x \in J, P(x)$.

Exercice 3 *(Logique élémentaire)*.

1. Prouver la formule suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$
2. Donner la négation de cette formule. Si cette négation est vraie donner une preuve et si non donner un contre exemple explicite.
3. Que dire de la formule suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$?

Exercice 4 *(Croissance des fonctions)*.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante quand elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \tag{1}$$

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *strictement* croissante quand elle vérifie la propriété de croissance avec des inégalités strictes.

1. Que dire si l'on remplace l'implication par une équivalence dans la définition de croissance ?
2. Que dire si l'on remplace l'implication par une équivalence dans la définition de la croissance stricte ?

Exercice 5 *(Croissance des fonctions)*.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante quand elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \tag{2}$$

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *strictement* croissante quand elle vérifie la propriété de croissance avec des inégalités strictes.

1. Que dire si l'on remplace l'implication par une équivalence dans la définition de croissance ?
2. Que dire si l'on remplace l'implication par une équivalence dans la définition de la croissance stricte ?

1.2 Fonctions

Exercice 6 *()*. Donner les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous a, b dans $\mathbb{N}$, $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Exercice 7 *()*. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Prouver l'unicité de cette écriture.

Exercice 8 *()*.
Soient A et B deux parties de E. Montrer que $A \cap B = A \cup B$ implique $A = B$.

Exercice 9 *()*.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique pour tout $T \geq 0$. Montrer qu'elle est constante. (Une fonction f est dite T-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(T + x)$).

Exercice 10 *()*.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. On veut montrer que $\exists x, y \notin \mathbb{Q}, x^y \in \mathbb{Q}$.
   (a) On suppose que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$. Montrer la propriété demandée.
   (b) Conclure.

1.3 Ensembles

Exercice 11 *()*.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ vérifiant pour tous a, b, $f(ab) = f(a)f(b)$ et $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Exercice 12 *(Sur les inclusions d'ensembles).*
On pose $P = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $I = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, (n = 2k) \vee (n = 2k+1) \tag{3}$$

2. En déduire une inclusion entre $P \cup I$ et $\mathbb{N}$
3. Montrer l'inclusion réciproque
4. En déduire que $P \cup I = \mathbb{N}$
5. Montrer que $P \cap I = \emptyset$
6. On dit qu'un entier est pair quand il est dans P et qu'un entier est impair quand il est dans I. Qu'avons nous montré dans cet exercice ?

Exercice 13 *().*
Montrer que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ne peut pas s'écrire comme un produit cartésien $A \times B$ avec A et B des parties de $\mathbb{R}$.