Analyse Asymptotique
Révisions

Question de cours

Chamberlin	Propriétés de la valeur absolue (enoncé + justification
Chamberlin	Convexe non vide borné de $\mathbb{R}$ est un intervalle
Chamberlin	Inégalité triangulaire complexe (maj/min)
Chamberlin	Symétrie des coefficients binomiaux + triangle de pascal
Chamberlin	Binôme de Newton

1 Suites

Exercice 1 *(Développement asymptotique d'une suite récurrente).*
On pose (u_n) avec $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \tag{1}$$

(a) Quelle est la limite de u_n ?

(b) Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2$ possède une limite finie

(c) En déduire un équivalent de u_n

Exercice 2 *(DA d'une suite récurrente (dur)).*
On pose (u_n) avec $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \tag{2}$$

(a) Quelle est la limite de u_n ?

(b) On pose $v_n = e^{u_n}$. Quelle est l'équation de récurrence de v_n ?

(c) Que dire de v_n ? (signe, limite…)

(d) En déduire une écriture de v_{n+1} de la forme $X + o(1/v_n)$

(e) Utiliser ceci pour calculer la limite de $v_{n+1} - v_n$

(f) En déduire que $v_n \sim n$

(g) Conclure sur un développement asymptotique de v_n à deux termes, puis sur un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Exercice 3 *(Suite définie implicitement)*.
On pose $P_n = X^{2n} - 2nX + 1$ et a_n la plus grande racine réelle de P_n.

(a) Justifier l'existence de a_n

(b) Encadrer a_n

(c) En déduire un équivalent à deux termes de a_n

Exercice 4 *(Développements asymptotiques)*.
Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes

(a) $(1+\sqrt{1+x^2})^{1/2}$

(b) $\log(\sin(x)/x)$

(c) $(1+2x)^{1/(1+x)}$

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 4 en 1 de la fonction suivante

$$x^{-\frac{1}{-1+\ln x}} \tag{3}$$

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction suivante

$$\left(\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right)\ln x \tag{4}$$

2 Fonctions

Exercice 5 *()*.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. A-t-on toujours $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$? Donner la négation de cette formule. Que dire des fonctions qui vérifient $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$?

Exercice 6 *(Croissance des fonctions)*.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante quand elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \tag{5}$$

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *strictement* croissante quand elle vérifie la propriété de croissance avec des inégalités strictes.

1. Que dire si l'on remplace l'implication par une équivalence dans la définition de croissance ?
2. Que dire si l'on remplace l'implication par une équivalence dans la définition de la croissance stricte ?

Exercice 7 *(Développement asymptotique d'une suite récurrente)*.
On pose (u_n) avec $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \tag{6}$$

(a) Quelle est la limite de u_n ?

(b) Montrer que $u_{n+1}^2 - u_n^2$ possède une limite finie

(c) En déduire un équivalent de u_n

Exercice 8 *(DA d'une suite récurrente (dur))*.
On pose (u_n) avec $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \tag{7}$$

(a) Quelle est la limite de u_n ?

(b) On pose $v_n = e^{u_n}$. Quelle est l'équation de récurrence de v_n ?

(c) Que dire de v_n ? (signe, limite...)

(d) En déduire une écriture de v_{n+1} de la forme $X + o(1/v_n)$

(e) Utiliser ceci pour calculer la limite de $v_{n+1} - v_n$

(f) En déduire que $v_n \sim n$

(g) Conclure sur un développement asymptotique de v_n à deux termes, puis sur un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Exercice 9 *(Suite définie implicitement).*
On pose $P_n = X^{2n} - 2nX + 1$ et a_n la plus grande racine réelle de P_n.

(a) Justifier l'existence de a_n

(b) Encadrer a_n

(c) En déduire un équivalent à deux termes de a_n

Exercice 10 *(Développements asymptotiques).*
Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes

(a) $(1+\sqrt{1+x^2})^{1/2}$

(b) $\log(\sin(x)/x)$

(c) $(1+2x)^{1/(1+x)}$

Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 4 en 1 de la fonction suivante

$$x^{-\frac{1}{-1+\ln x}} \tag{8}$$

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction suivante

$$\left(\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right)\ln x \tag{9}$$

3 Séries

Exercice 11 *(Nature d'une série).*
Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}\right) \tag{10}$$

Exercice 12 *(Équivalent de la factorielle).*
On pose u_n comme suit

$$u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\frac{1}{n!} \tag{11}$$

Et $v_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$

(a) Quelle est la nature de $\sum v_n$?

(b) En déduire un équivalent de $n!$ dépendant d'une constante K fixée.

Exercice 13 *(Comparaison de convergence).*
Soit (u_n) une suite positive et $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$. On souhaite comparer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

(a) En utilisant $u_n = 1$ et $u_n = n$ conclure dans le cas où $\sum u_n$ diverge

(b) Supposons que u_n converge. Trouver une condition pour que $\sum v_n$ converge.