

MSO-Model-Checking sur les graphes infinis

Stage M1 Court

Basile Morcrette
sous la direction de Wolfgang Thomas

ENS Cachan
Informatik VII
RWTH Aachen

2 Septembre 2008

Plan

- 1 **Préliminaires**
 - Graphes infinis
 - Logique
- 2 **Transformations de graphes**
 - Unfolding
 - MSO-interprétation
- 3 **La hiérarchie de Caucal**
- 4 **Suites de graphes**
 - Suites, limites, croissance
 - Schéma itératif
 - Schéma arborescent
 - Schéma linéaire

Graphes infinis

- $G = (V, (E_a)_{a \in \Sigma}, (P_b)_{b \in \Gamma})$
- V ensemble des sommets,
- $E_a \subset V \times V$ relation binaire sur les sommets.
 E_a arêtes étiquetées par a
- P_b prédicat unaire : sommets étiquetés par b .

MSO-Logique

Logique monadique du second ordre

x, y, z, \dots variables du premier ordre : éléments

X, Y, Z, \dots variables du second ordre : ensemble d'éléments

- atomes : $X(x)$, $E_a(x, y)$, $P_b(x)$ pour $a \in \Sigma$ and $b \in \Gamma$
- opérations booléennes : \wedge , \vee , \neg , \Rightarrow
- quantificateurs : $\exists x$, $\forall x$, $\exists X$, $\forall X$

Model Checking

- $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ MSO-formules où X_1, \dots, X_n sont des variables libres.
- φ formule close = sans variables libres.

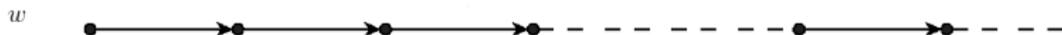
Problème du Model-Checking

Étant donné un graphe G et une MSO-formule close φ , $G \models \varphi$?
i.e. φ est-elle vraie dans G ?

- $\text{MSO-Th}(G)$: MSO-formules closes qui sont vraies dans G .
- $\text{MSO-Th}(G)$ est décidable ssi le problème du Model-checking est décidable.

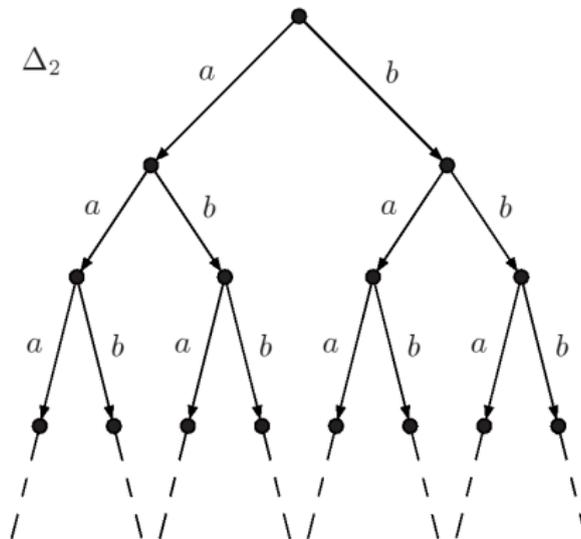
Décidabilité - Exemples

- ω -mot : $(\mathbb{N}, Succ)$:
MSO-théorie = S1S décidable (Büchi)



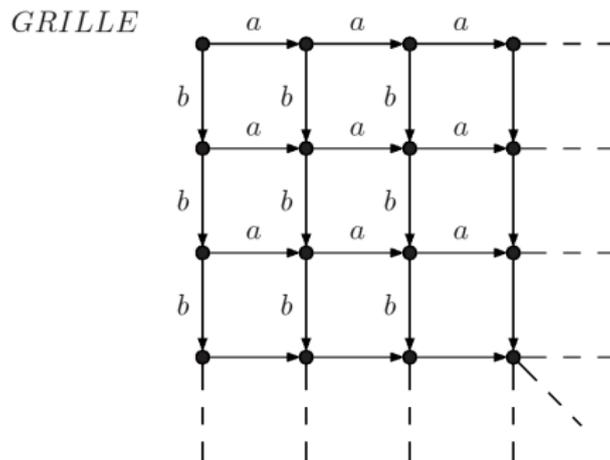
Décidabilité - Exemples

- Arbre binaire infini : $(\{0, 1\}^*, E_a, E_b)$:
MSO-théorie = S2S décidable (Rabin)



Indécidabilité - Exemple

- Grille infinie : $GRILLE = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, E_a, E_b)$.
Sa théorie est indécidable.



Opération d'unfolding

Rappelons une définition :

Soit $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ une MSO-formule et \mathcal{A} une structure.
 L'ensemble des modèles de φ est
 $\varphi^{\mathcal{A}} = \{(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \mid \mathcal{A} \models \varphi[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]\}$

Définition (Unfolding)

Soit G un graphe et $v \in V_G$ un sommet. v est défini par une MSO-formule $\varphi(x) : \varphi^G = \{v\}$

$\text{Unf}(G, v) = (V_U, E_U)$

V_U est l'ensemble de tous les chemins possibles finis dans G commençant en v .

$V_U =$

$\{v_0 a_1 v_1 \dots a_k v_k \mid v_0 \xrightarrow{a_1} v_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_k} v_k \text{ est un chemin dans } G\}$

Exemple d'unfolding

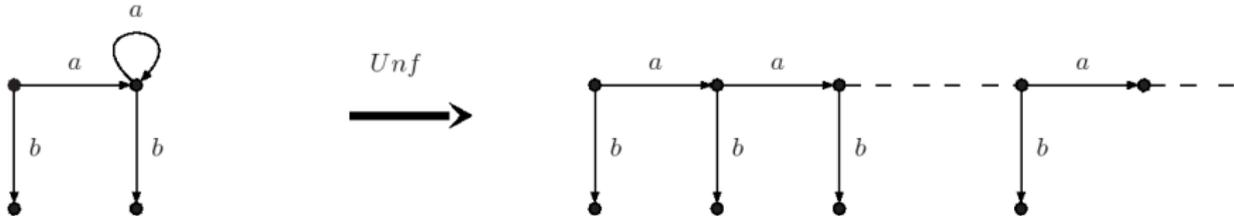


FIG.: Un graphe et son unfolding à partir de la racine

Propriété de décidabilité

Théorème (Muchnik, Walukiewicz, Courcelle)

$\text{MSO-Th}(G) \text{ décidable} \Rightarrow \text{MSO-Th}(\text{Unf}(G, v)) \text{ décidable.}$

MSO-Interprétation

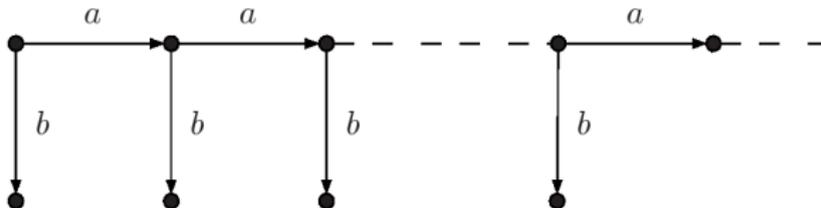
Définition (MSO-interprétation)

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux graphes sans prédicats unaires. Une MSO-interprétation \mathcal{I} de \mathcal{B} dans \mathcal{A} est donnée par les MSO-formules $\delta(\mathbf{x})$ et $(\psi_a)_{a \in \Sigma}$ telles que :

$$\mathcal{B} = (V, (E_a)_{a \in \Sigma}) \simeq (\delta^{\mathcal{A}}(\mathbf{x}), (\psi_a^{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{a \in \Sigma})$$

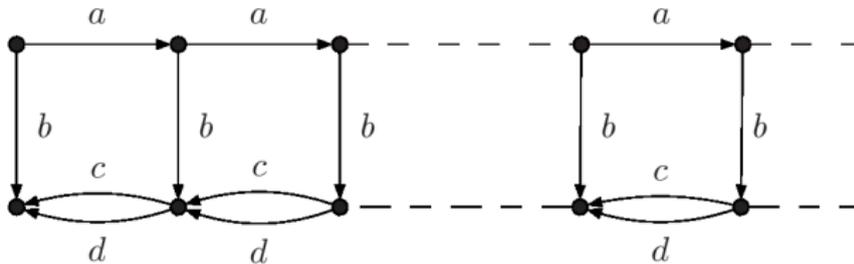
- $\delta(\mathbf{x})$: domaine
- $\psi_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$: arêtes étiquetées par a

Exemple de MSO-Interprétation



- domaine : tous les sommets : $\varphi(x) := x = x$
- $\psi_a := E_a$, $\psi_b := E_b$
- $\psi_c(x, y) = \psi_d(x, y) =$
 $\exists z_1 z_2 (E_a(z_1, z_2) \wedge E_b(z_1, y) \wedge E_b(z_2, x))$

Exemple de MSO-Interprétation



Propriété de décidabilité

Théorème

S'il existe une MSO-interprétation de \mathcal{B} dans \mathcal{A} , et si $\text{MSO-Th}(\mathcal{A})$ est décidable, alors $\text{MSO-Th}(\mathcal{B})$ est décidable.

La hiérarchie de Caucal

Définition

$\mathcal{T}_0 =$ arbres finis

$\mathcal{G}_n =$ graphes obtenus par MSO-interprétation d'une structure $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}_n$

$\mathcal{T}_{n+1} =$ graphes obtenus par Unfolding d'une structure $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}_n$

Exemples

Exemple

$\mathcal{T}_0 =$ arbres finis

$\mathcal{G}_0 =$ graphes finis

$\mathcal{T}_1 =$ arbres réguliers (nombre fini de sous-arbres distincts non isomorphes)

$\mathcal{G}_1 =$ graphes préfixe-reconnaissables

Remarque

Tous les graphes dans la hiérarchie ont une MSO-théorie décidable.

Cette hiérarchie est stricte.

Suite de graphes et limite

- Une suite de graphes est une suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$G_n = (V_n, (E_a^n)_{a \in \Sigma_n}, (P_b^n)_{b \in \Gamma_n})$$

Definition (Limite d'une suite)

$$G_\omega = (V_\omega, (E_a^\omega)_{a \in \Sigma}, (P_b^\omega)_{b \in \Gamma})$$

$$V_\omega = \{v \in \cup_{i \geq 0} V_i \mid \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, v \in V_n\}$$

$$E_a^\omega = \{(u, v) \in V_\omega \times V_\omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, (u, v) \in E_a^n\}$$

$$P_b^\omega = \{v \in V_\omega \mid \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, v \in P_b^n\}$$

Suite de graphes et limite

- Une suite de graphes est une suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$G_n = (V_n, (E_a^n)_{a \in \Sigma_n}, (P_b^n)_{b \in \Gamma_n})$$

Proposition

$$G_\omega = \bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{n \geq k} G_n$$

Suite croissante

Définition (Croissance dans la hiérarchie de Caucal)

Soit $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de graphes. Cette suite est dite *croissante* si $\forall n, G_n \in \mathcal{G}_n$.

Elle est dite *strictement croissante* si $\forall n, G_n \in \mathcal{G}_n \setminus \mathcal{G}_{n-1}$.

Problème

Quelles restrictions sur les suites doit-on imposer pour s'assurer que la MSO-théorie de la limite soit décidable ?

Schéma Unfolding/MSO-interprétation

Idée

Construire des suites de façon itérative : on obtient une étape de la suite à partir de la précédente avec la même MSO-interprétation et le même unfolding.

Schéma Unf/MSO :

- premier terme G_0
- étape itérative :
 - Unfolding \mathcal{U} (avec formule fixée)
 - MSO-interprétation \mathcal{I} (avec des formules fixées)
 - $\mathcal{F} = \mathcal{I} \circ \mathcal{U}$
 - $\forall n \geq 0, G_{n+1} = \mathcal{F}(G_n)$

Schéma arborescent

- Unfolding généralisé :
 - $\varphi(x)$: MSO-formule
 - à l'étape n , appliquer les unfoldings aux sommets v avec $v \in \varphi^{G_n}$
 - plusieurs unfoldings à chaque étape : "arborescent"
- MSO-interprétation généralisée :
 - formule de domaine paramétrée par x : $\phi(x, y)$
 - formules d'arêtes paramétrées par x : $\psi(x, y, z)$

À chaque étape :

- sélectionner le domaine et les arêtes avec la MSO-interprétation
- appliquer l'unfolding pour chaque sommet concerné
- concaténer les résultats des unfoldings avec la structure précédente

Propriété de décidabilité

Théorème

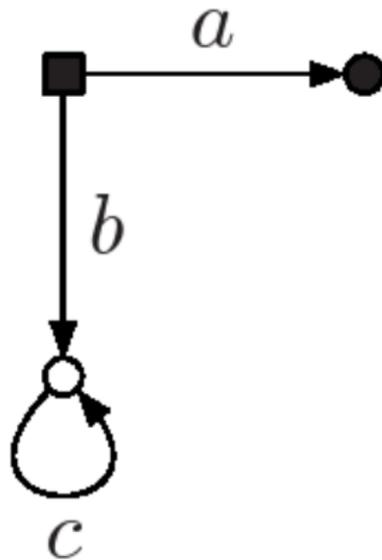
Le schéma arborescent préserve la propriété de décidabilité de la MSO-théorie, pour une étape.

Proposition

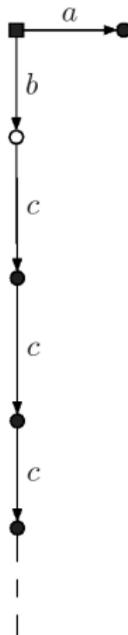
Partant d'un graphe G_0 avec une MSO-théorie décidable, on peut obtenir une limite ayant une MSO-théorie indécidable : la grille.

Le schéma arborescent est trop expressif !

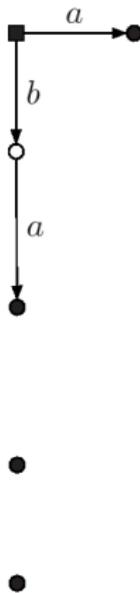
Construction de la grille



Construction de la grille



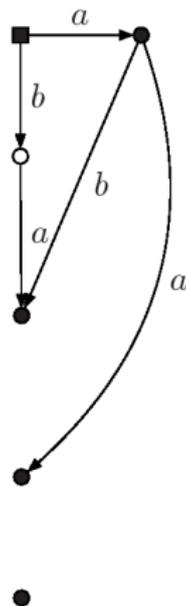
Construction de la grille



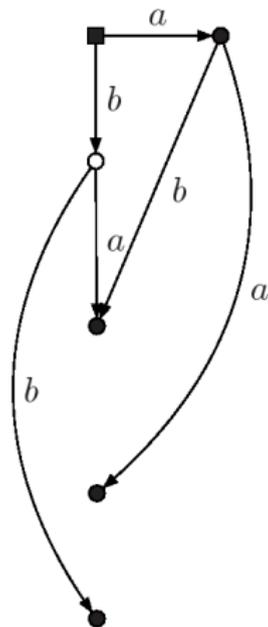
Construction de la grille



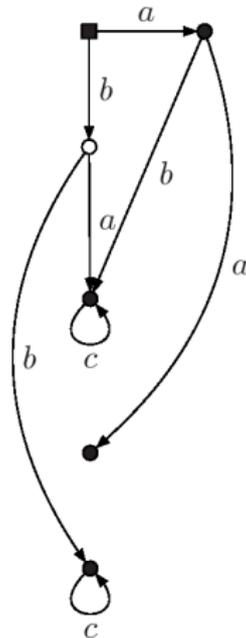
Construction de la grille



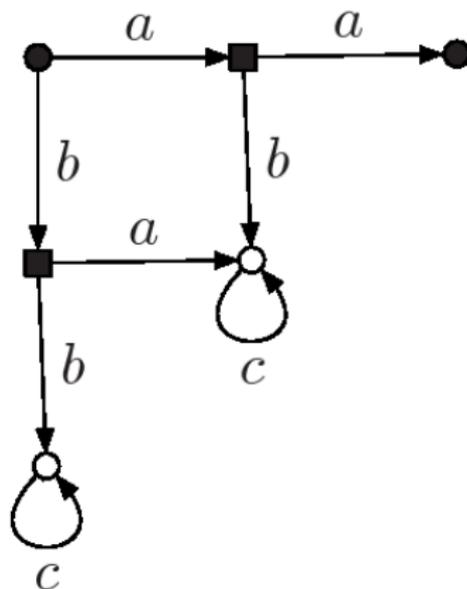
Construction de la grille



Construction de la grille



Construction de la grille



Construction de la grille

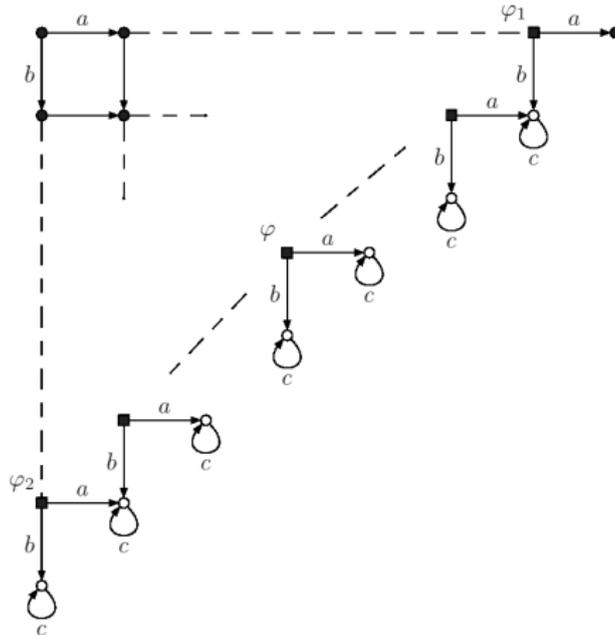


Schéma linéaire

- Unfoldings avec un seul sommet, défini par $\varphi(x)$
- Une MSO-interprétation

Ce schéma est suffisamment expressif pour sortir de la hiérarchie de Caucal.

Exemple : Une suite strictement croissante dans la hiérarchie peut avoir une limite hors de la hiérarchie mais dont la MSO-théorie est décidable.

On construit effectivement une structure $(\mathbb{N}, Succ, P)$ avec l'ensemble des hyperpuissances de 2.

Propriété de décidabilité ?

Le schéma linéaire est-il trop expressif pour garantir la décidabilité de la MSO-théorie de la structure limite ?

Oui dans certains cas !

Mais

Il est moins expressif que le schéma arborescent : on ne peut pas générer la grille avec le schéma linéaire.

Expressivité du schéma linéaire

- Le schéma linéaire peut amener à des structures indécidables
- On peut simuler l'exécution d'une machine de Turing ...

Conclusion

- Introduction des suites de graphes et des schémas
Unfolding/MSO-interpretation
- Présentation de deux schémas de construction pour
obtenir des structures complexes ayant une MSO-théorie
décidable
- Le schéma linéaire peut être un bon moyen d'étendre les
propriétés de décidabilité au modèle limite, à condition de
partir de graphes finis ?