

# Synthèse : IFS (iterated function systems) dans le cas d'un spectre fractal ; application à la dynamique quantique pour un spectre fractal et l'étude du coefficient de Thouless

## Introduction

On considère un système quantique 1D régi par un hamiltonien  $H$  dont le spectre  $K$  est stable par un ensemble de transformations  $\{t_i(x)\}_{i=1,n}$ . On munit le spectre d'une mesure  $d\mu$  appropriée, telle que :

$$\int_K f(x)d\mu(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_K f(t_i(x))d\mu(x)$$

Exemples :

- (1) ensemble de Cantor triadique, contenu dans  $[-1/2, 1/2]$  :  $\int_K f(x)d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_K f((x-1)/3)d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_K f((x+1)/3)d\mu(x)$
- (2) ensemble de Julia :  $\int_K f(x)d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_K f(\sqrt{x+\lambda})d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_K f(-\sqrt{x+\lambda})d\mu(x)$ ,  $\lambda > 2$ .

Pour chaque  $K$  et chaque mesure  $\mu$ , on peut construire récursivement un ensemble de polynômes orthogonaux  $\{p_n(x)\}$  pour  $\mu$  :  $\int_K p_n(x)p_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m}$ . De façon générale, les polynômes sont donnés par la relation de récurrence suivante :  $xp_n(x) = r_{n+1}p_{n+1}(x) + a_n p_n(x) + r_n p_{n-1}(x)$ . On peut y associer la matrice de Jacobi  $J$  (tridiagonale, symétrique) définie par :  $J_{i,i} = a_i$ ,  $J_{i-1,i} = J_{i,i-1} = r_i$ . La relation de récurrence peut alors s'écrire synthétiquement :

$$Jp = xp$$

## Application à la dynamique d'un système quantique

On peut relier les polynômes introduits précédemment aux fonctions propres de  $H$ .

Dans le cas où les  $r_i$  sont constants,  $J$  s'interprète comme la matrice du hamiltonien dans le modèle du tight-binding ; dans ce cas, le vecteur  $\psi_\epsilon(n) = (p_1(\epsilon), p_2(\epsilon), \dots, p_n(\epsilon), \dots)$  est (à facteur de renormalisation près) le vecteur propre pour la valeur propre  $\epsilon$ .

Dans certains cas, comme par exemple quand  $K$  est centré en zéro et où la mesure est symétrique, on peut construire les polynômes avec une relation de récurrence de la forme :

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - r_n p_{n-1}(x)$$

avec  $p_0 = 1$ ,  $p_1(x) = x$ . C'est le cas des deux exemples cités à la section précédente (cf. [1], [2]). La matrice de Jacobi associée n'a alors pas de terme diagonal, et s'interprète comme la matrice du hamiltonien dans le modèle tight-binding, en représentation non-diagonale ; l'équation de Schrödinger discrétisée associée est :

$$\sqrt{r_n} \phi_\epsilon(n+1) + \sqrt{r_{n-1}} \phi_\epsilon(n-1) = \epsilon \phi_\epsilon(n)$$

Le lien entre les vecteurs propres  $\phi_\epsilon$  et les polynômes  $p_n(\epsilon)$  est :

$$\phi_n(\epsilon) = p_n(\epsilon) / \sqrt{r_1 r_2 \dots r_n}$$

On peut maintenant réinjecter cette relation dans l'expression de quantités physiques pour étudier la dynamique d'un système quantique évoluant selon cet hamiltonien.

Considérons un paquet d'onde  $\psi(t)$ , dont l'évolution est régie par l'équation de Schrödinger :  $i \frac{d\psi(t)}{dt} = J\psi(t)$ , et localisé à  $t = 0$  en  $k = k_0$  :  $\langle k | \psi(t=0) \rangle = \delta(k - k_0)$ . Après un temps  $t$ , le système est dans l'état :  $|\psi(t)\rangle = e^{-iJt} |\psi(0)\rangle$  ; la valeur de la fonction d'onde en un site  $k$  est donné par :

$$|\psi(k, t)| = \int_K \phi_\epsilon(k_0)^* \phi_\epsilon(k) e^{-i\epsilon t}$$

Dans [3], cette méthode est utilisée pour étudier les moments

$$\nu_\alpha(t) = \sum_k k^\alpha |\psi(k, t)|^2$$

L'utilisation des transformées de Mellin permet, selon [3], de conclure que, pour certaines valeurs de  $\alpha$ , les moments ont asymptotiquement un comportement log-périodique. Ceci reste à démontrer.

## Coefficient de Thouless

On étudie ici séparément les propriétés du coefficient de Thouless pour un spectre de Cantor triadique (stable par une transformation linéaire) et pour un spectre de Julia, type Cantor, stable par une transformation quadratique (du type de l'exemple (2)).

## To do

En lien avec le papier en cours sur la dynamique quantique pour un spectre de Cantor :

- utiliser les polynômes orthogonaux pour la mesure  $\mu$  définie sur l'ensemble de Cantor triadique pour obtenir des informations sur le RMS, le rapport de participation inverse, et éventuellement retrouver l'expression de la fonction de corrélation ; j'ai également commencé une étude numérique avec cette technique, mais il y a encore du code à écrire.
- comparer la dynamique de systèmes pour un spectre de Cantor triadique (spectre invariant par une transformation linéaire, comme citée à l'exemple (1)) et pour un spectre de Julia également de type Cantor (stable par une transformation quadratique par exemple comme cité exemple (2)). Cela pourrait être intéressant de voir si l'on retrouve les mêmes comportements dynamique, malgré le fait que les coefficients de Thouless ont a priori des comportements très différents.

En lien avec la superradiance :

- on peut considérer la superradiance dans le cas d'un spectre de Julia type Cantor, pour utiliser l'invariance du spectre par une transformation quadratique, qui semble plus riche que le cas linéaire pour étudier la résolvente associé à l'hamiltonien du système.

## Références

- [1] J. Bellissard, D. Bessis, P. Moussa, Chaotic states of almost periodic Schrodinger operators, Phys. Rev. Lett., Vol 49 number 10 (1982)
- [2] Steven M. Heilman, Philip Owrutsky, Robert S. Strichartz, Orthogonal polynomials with respect to self-similar measures, Experimental Mathematics, 20 (2011), 238-259
- [3] G. Mantica, Wave propagation in almost-periodic structures, PhysicaD109 (1997) 113-127