

Calcul de $h_k(t)$

On calcule ici les fonctions de la forme : $h_k(t) = \int_K e^{-ixt} x^k d\mu(x)$, avec $k \in \mathbb{N}$ et où K désigne l'ensemble de Cantor triadique.

La mesure $d\mu$ est telle que, pour toute fonction f définie sur K :

$$\int_k f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_k f\left(\frac{x}{3}\right) d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_k f\left(\frac{x+2}{3}\right) d\mu(x) \quad (1)$$

L'idée du calcul est la suivante : calculer la transformée de Mellin $m_k(s)$ de $h_k(t)$, calculer ses pôles, et en déduire $h_k(t)$ en appliquant la transformée de Mellin inverse.

Transformée de Mellin :

$$\begin{aligned} m_k(s) &= \int_0^\infty t^{s-1} h_k(t) dt \\ &= \int_K d\mu(x) x^k \int_0^\infty t^{s-1} e^{-ixt} dt \\ &= \Gamma(s) e^{-i\pi s/2} \underbrace{\int_K d\mu(x) x^{k-s}}_{l_k(s)} \end{aligned}$$

avec Γ la fonction gamma d'Euler.

L'intégrale $\int_0^\infty t^{s-1} h_k(t) dt$ converge sur la bande $0 < \Re(s) < 1$, mais $m_k(s)$ se prolonge analytiquement sur \mathbb{C} en une fonction méromorphe.

Maintenant, en appliquant (1) :

$$\begin{aligned} l_k(s) &= \int_K d\mu(x) x^{k-s} \\ &= \frac{1}{2} \int_K d\mu(x) \frac{x^{k-s}}{3^{k-s}} + \frac{1}{2} \int_K d\mu(x) \frac{(x+2)^{k-s}}{3^{k-s}} \\ &= \frac{1}{2} \int_K d\mu(x) \frac{x^{k-s}}{3^{k-s}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_K d\mu(x) \frac{(x+2)^{k-s}}{3^{k-s}}}_{r_k(s)} \\ &= \frac{3^{s-k}}{2} l_k(s) + r_k(s) \end{aligned}$$

$r_k(s)$ n'a pas de pôles car $x+2$ ne s'annule pas sur K . Donc :

$$l_k(s) = \frac{r_k(s)}{1 - 3^{s-k}/2}$$

est une fonction méromorphe, prolongeable analytiquement sur \mathbb{C} , avec des pôles en : $s_{m,k} = k + \frac{\ln 2}{\ln 3} + \frac{2i\pi m}{\ln 3}$, $m \in \mathbb{Z}$, le résidu en $s_{m,k}$ étant $\frac{1}{\ln 3}$. Par ailleurs, Γ a ses pôles en $\gamma_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, avec pour résidu en γ_n : $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Transformée de Mellin inverse :

$$h_k(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^{-s} m_k(s) ds$$

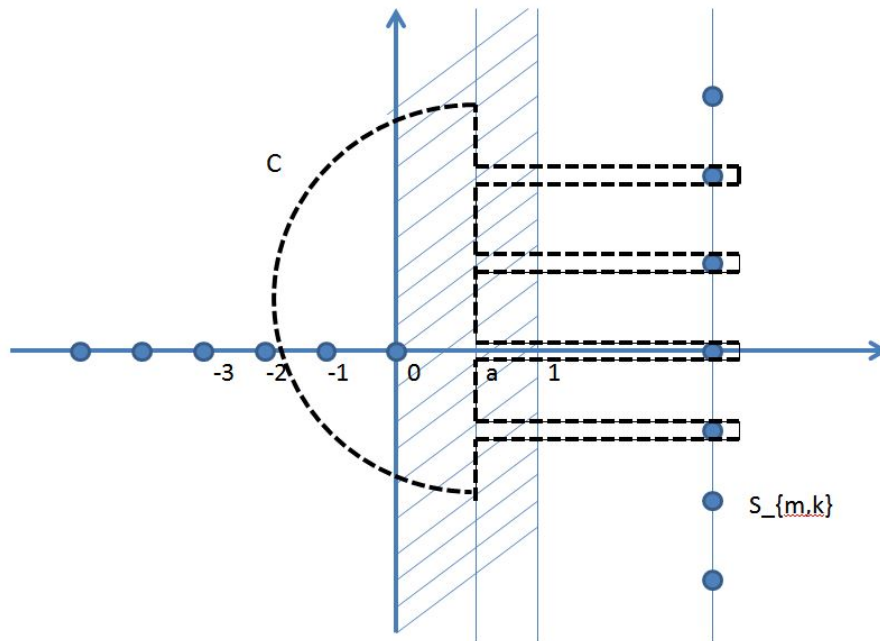


FIGURE 1 – Chemin d'intégration pour l'application de la formule des résidus.

avec $0 < a < 1$.

En appliquant la formule des résidus sur le contour d'intégration C , on obtient :

$$h_k(t) = t^{-k-\ln 2/\ln 3} \sum_{m \in \mathbb{Z}} t^{-2i\pi m/\ln 3} e^{-i\pi s_{m,k}/2} r_{k,m} \Gamma(s_{m,k}) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} e^{i\pi n/2} \frac{r_k(-n)}{1 - 3^{-n-k}/2} t^n \quad (2)$$