

# Dynamique quantique pour un spectre fractal - application à des processus simples en électrodynamique et optique quantique

Ariane SORET<sup>1,2</sup>  
Eric AKKERMANS<sup>1</sup>

1 - Technion Institute of Technology ; 2 - École Normale Supérieure Cachan

Année ARPE  
Septembre 2014 - Juillet 2015

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
  - Mesure spectrale
  - Probabilité moyenne de retour à l'origine
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding
  - Description du modèle
  - Réduction du problème à l'étude de fonctions simples
  - Résultats théoriques
  - Résultats numériques
  - Coefficient de Thouless
- 5 Conclusion et perspectives

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding



# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding
- 5 Conclusion et perspectives

Étudier des systèmes avec une **structure fractale** (spatiale ou spectrale).

Motivations :

- spectres **singulier-continus** très fréquents dans systèmes physiques, mais mal connus
- Expliquer des résultats expérimentaux et numériques

Objectifs :

- Identifier la signature d'une structure fractale (spatiale et/ou spectrale) dans des quantités physiques pertinentes → loi de puissance modulée par des oscillations log-périodiques
- Calculer les expressions analytiques, et les comparer aux expériences

Fractale :

- ensemble avec une **symétrie d'échelle discrète**
- dimension fractale  $d_f$  (échelle de longueur  $l$ ; volume  $l^{d_f}$ )

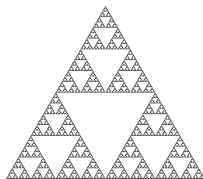


Figure : Triangle de Sierpinski ;

$$d_f = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
  - Mesure spectrale

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
  - Mesure spectrale
  - Probabilité moyenne de retour à l'origine
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
  - Mesure spectrale
  - Probabilité moyenne de retour à l'origine
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
  - Mesure spectrale
  - Probabilité moyenne de retour à l'origine
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
  - Mesure spectrale
  - Probabilité moyenne de retour à l'origine
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding



# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
  - Mesure spectrale
  - Probabilité moyenne de retour à l'origine
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
  - Mesure spectrale
  - Probabilité moyenne de retour à l'origine
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding
- 5 Conclusion et perspectives

Dynamique quantique dans le cas où le spectre = ensemble de Cantor triadique.

$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ , avec pour spectre un ensemble de Cantor triadique.

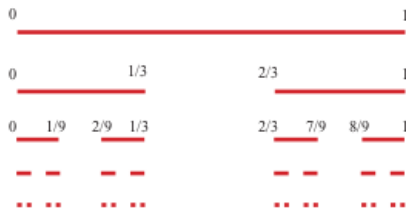
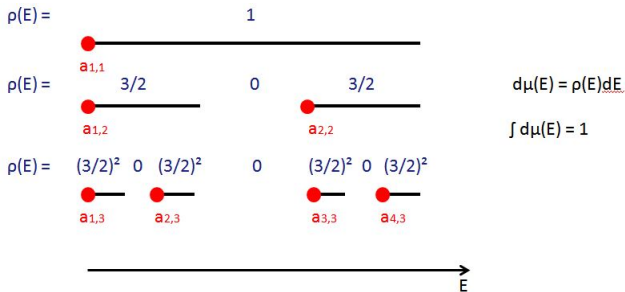


Figure : Ensemble de Cantor triadique. Dimension fractale  $d_K = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

Ensemble de Cantor triadique : de mesure de Lebesgue nulle.  
 Densité d'états dégénérée  $\rho(\epsilon)$ . Définition d'une  
 mesure :  $d\mu(\epsilon) \equiv \rho(\epsilon)d\epsilon$  :



Vérifie :  $\int_K f(x)d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x}{3}\right)d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x+2}{3}\right)d\mu(x)$   
 (relation d'échelle)

Comment la structure fractale affecte-t-elle la dynamique du paquet d'onde  $|\psi(t)\rangle$  ?

- 1 Déplacement moyen (Root Mean Displacement RMS)

$$\Delta x(t) = \sqrt{\int (x(t) - x_0)^2 |\psi(x, t)|^2 dx}$$

- 2 Probabilité de retour à l'origine  $p(t) = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2$
- 3 ...

Une quantité pertinente : la **probabilité de retour à l'origine moyenne** :

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi(0) | \psi(t') \rangle|^2 dt'$$

Une quantité pertinente : la **probabilité de retour à l'origine moyenne** :

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi(0) | \psi(t') \rangle|^2 dt' = \iint_{K \times K} \text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t) d\mu(\epsilon) d\mu(\epsilon')$$

Note :  $\epsilon$  et  $t$  sont des variables couplées.

Méthode

- ① utiliser la symmétrie du spectre pour obtenir une équation fonctionnelle
- ② appliquer la transformation de Mellin

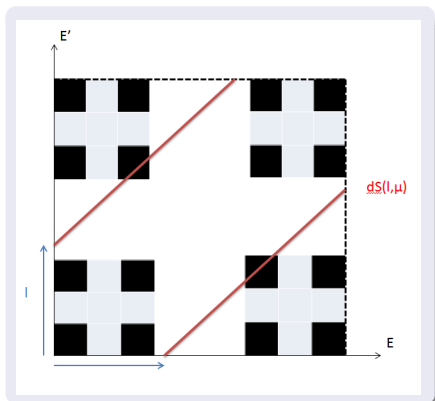
$$C(t) = \iint_{K \times K} \text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t) d\mu(\epsilon) d\mu(\epsilon')$$

Changement de variables :

$$l = |\epsilon' - \epsilon|$$

$dS(l, \mu)$  = surface, au sens de  $\mu$ ,  
de l'ensemble de Cantor 2D  
("tapis de Cantor"), contenu  
dans les bandes rouges

$$C(t) = \int_0^1 \text{sinc}(lt) dS(l, \mu)$$



(cf. intégrales d'énergie : D. Bessis et al., Phys. Rev. A, Vol. 36, number 2, July 15, 1987)



## Principales étapes :

- 1 transformée de Mellin :

$$\zeta(\alpha) = \int_0^1 l^{-\alpha} dS(l, \mu) = \iint_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha}$$

- 2 propriété d'échelle :

$$\iint_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} =$$

$$\frac{1}{2} \iint_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{3^{-\alpha}|x-y|^\alpha} + \underbrace{\frac{1}{2} \iint_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{3^{-\alpha}|x-y+2|^\alpha}}_{g(\alpha)}$$

$$= \frac{3^\alpha}{2} \zeta(\alpha) + g(\alpha)$$

- 3  $\zeta(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{1 - \frac{3^\alpha}{2}}$

- 4 transformée de Mellin inverse  $\rightarrow dS(l, \mu) \rightarrow C(t)$

## Rappel :

- transformée de Mellin de  $f$  :  $M_f(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx$

- transformée de Mellin inverse :

$$M_\phi^{-1}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \phi(s)x^{-s}ds$$

## Probabilité de retour à l'origine moyenne pour un ensemble de Cantor (IPS meeting 2014 - Be'er Sheva)

$$C(t) = t^{-d_K} \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{-\frac{2i\pi n}{\ln 3}} a_n [1 + \mathcal{O}(t^{-1})]$$

$a_n = \frac{1}{\ln 3} \gamma(1 - d_{K,n}) \sin\left(\frac{\pi}{2}(d_K - 1 + \frac{2i\pi n}{\ln 3})\right) \Gamma(d_K - 1 + \frac{2i\pi n}{\ln 3})$ ,  $\Gamma$  fonction gamma de Euler  $\Rightarrow$

$$C(t) \sim_{t \rightarrow \infty} t^{-\ln 2 / \ln 3} G_p(\ln t / \ln 3), \quad G_p(y+1) = G_p(y)$$

- 1 loi de puissance modulée par des oscillations log-périodiques.
- 2  $C(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} C\left(\frac{t}{3}\right)$
- 3  $C(t) \sim_{t \rightarrow \infty} t^{-d_K}$ ,  $d_K = \frac{\ln 2}{\ln 3}$  (dimension fractale) de l'ensemble de Cantor.

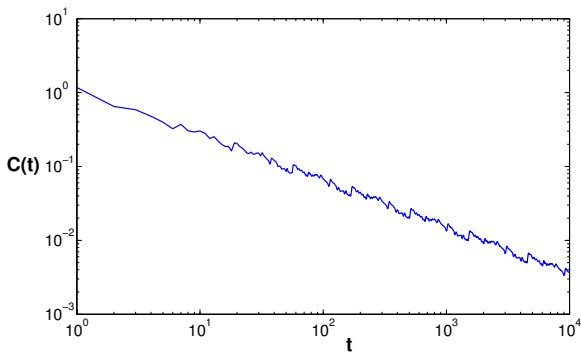


Figure : Probabilité de retour à l'origine moyenne  $C(t)$  pour un spectre de Cantor triadique

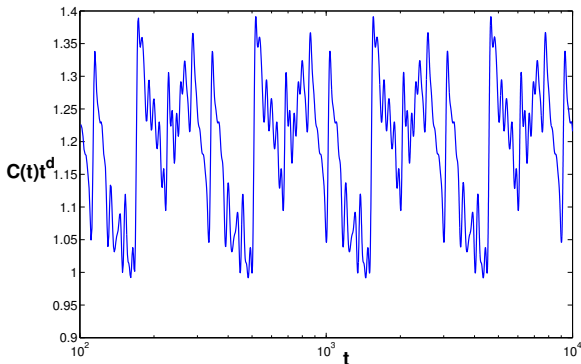


Figure : Probabilité de retour à l'origine moyenne divisée par  $t^{-\ln 2 / \ln 3}$ ,  $C(t)t^{\ln 2 / \ln 3}$  pour un spectre de Cantor

## Remarques :

- Méthode générale :  
propriété d'échelle  
→ équation fonctionnelle  $f(x) = \frac{1}{b}f(ax) + g(x)$   
→ transformée de Mellin  
→  $f(x) = x^{\ln(b)/\ln(a)} G_p\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$ ,  $G_p(y+1) = G_p(y)$
- Comportement caractéristique en présence d'un spectre fractal : loi de puissance modulée par des oscillations log-périodiques
- Cette méthode donne une intuition sur quelles quantités physiques ont ce comportement caractéristique

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding



# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

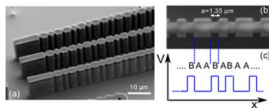
# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding
- 5 Conclusion et perspectives

Polaritons en cavité  
(quasi-particules associées au couplage fort entre photons et excitons) placés dans un potentiel quasi-périodique.

Équivalent à un problème 1D avec un **potentiel quasi-périodique** effectif  $V(x)$ , dont le spectre est **de type Cantor** :

$$E\psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m_{ph}} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x)$$



$S_1 = B$   
 $S_2 = A$   
 $S_3 = BA$   
 $S_4 = ABA$   
 $S_5 = BAABA$   
 $S_6 = ABABAABA$

$$S_{j+1} = S_{j-1}S_j$$

Figure : Cavité de Fibonacci

Probabilité de retour à l'origine

$$\text{moyenne : } C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi(0) | \psi(t') \rangle|^2 dt'$$

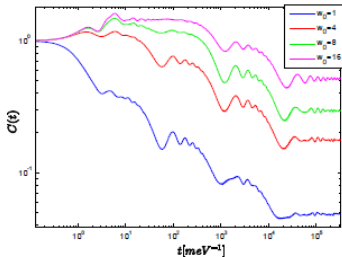


Figure : Probabilité de retour à l'origine moyenne d'un paquet d'onde dans un potentiel de Fibonacci.

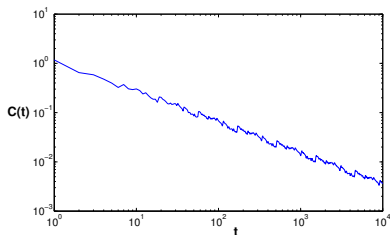


Figure : Probabilité de retour à l'origine moyenne pour un spectre de Cantor triadique.

- Vérification expérimentale des prédictions théoriques
- Difficulté d'observer les oscillations expérimentalement ; plus facile avec les quantités dynamiques
- Quelles autres quantités physiques portent la signature du spectre ? RMS  $\Delta x(t)$ , rapport de participation  $P_r(t)$  ?
- Quantités non purement spectrales  $\rightarrow$  il faut plus d'informations sur les fonctions propres du Hamiltonien

Discrete eigenvalue Schrodinger equation :

$$-\phi_\epsilon(k+1) - \phi_\epsilon(k-1) + 2\phi_\epsilon(k) + V(k)\phi_\epsilon(k) = \epsilon\phi_\epsilon(k)$$

$\Rightarrow \phi_\epsilon(k) = \phi_\epsilon(1)p_k(\epsilon)$ ,  $p_k(\epsilon)$  polynomial of degree  $k-1$

$\Rightarrow$  wave packet :  $\psi(k, t) = \int_K |\phi_\epsilon(1)|^2 p_k(\epsilon) e^{-i\epsilon t} d\tilde{\mu}(\epsilon)$ ,

$$|\phi_\epsilon(1)|^2 d\tilde{\mu}(\epsilon) = d\mu(\epsilon)$$

$\Rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t |\psi(k, t')|^2 dt' =$  linear combination of

$$f_{k,l}(t) = \iint_{K \times K} x^k x'^l \text{sinc}((x' - x)t) d\mu(x) d\mu(x')$$

Mellin transform on  $f_{k,l}(t)$  ( $G_p$  a periodic function)

$$\Rightarrow \langle |\psi(k, t)|^2 \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t |\psi(k, t')|^2 dt' \sim t^{-d_K} G_p \left( \frac{\ln t}{\ln 3} \right)$$



Apply to RMS :

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle \sim_{t \rightarrow \infty} t^{d_K} G_{per,RMS} \left( \frac{\ln t}{\ln 3} \right)$$

$G_{per,RMS}$  1-periodic, and  $d_K = \frac{\ln 2}{\ln 3}$  adapting [2].

$\Rightarrow$  asymptotically,  $\langle \Delta x^2(t) \rangle = \text{scaling function}$  (fig. 3).

Prediction  $\langle \Delta x^2(t) \rangle \sim_{t \rightarrow \infty} t^{d_f} G_{per,Fibo}(\ln t)$ , with  $d_f$  spectral dimension, verified (fig. 4).

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Expérience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding**

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Expérience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding**
  - Description du modèle

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Expérience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding**
  - Description du modèle
  - Réduction du problème à l'étude de fonctions simples

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Expérience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding**
  - Description du modèle
  - Réduction du problème à l'étude de fonctions simples
  - Résultats théoriques

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Expérience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding**
  - Description du modèle
  - Réduction du problème à l'étude de fonctions simples
  - Résultats théoriques
  - Résultats numériques

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Expérience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding**
  - Description du modèle
  - Réduction du problème à l'étude de fonctions simples
  - Résultats théoriques
  - Résultats numériques
  - Coefficient de Thouless



Choix d'un modèle : tight-binding.

- Système 1 D discret : lattice infinie, sites  $k$  de 0 à l'infini
- Schrödinger discretisé :  $H\phi_\epsilon(k) = \epsilon\phi_\epsilon(k)$  devient

$$-\phi_\epsilon(k+1) - \phi_\epsilon(k-1) + 2\phi_\epsilon(k) + V(k)\phi_\epsilon(k) = \epsilon\phi_\epsilon(k)$$

Matrices de transfert  $\rightarrow$  fonctions propres :

$$\begin{pmatrix} \phi_\epsilon(k+1) \\ \phi_\epsilon(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + V(k) - \epsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_\epsilon(k) \\ \phi_\epsilon(k-1) \end{pmatrix}$$

On impose  $\phi_\epsilon(0) = 0 \rightarrow$

$\phi_\epsilon(k) = \phi_\epsilon(1)p_k(\epsilon)$  avec  $\{p_k(\epsilon)\}$  **polynômes** obtenus par :

$$\begin{pmatrix} p_k(\epsilon) & * \\ p_{k-1}(\epsilon) & * \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^k \begin{pmatrix} 2 + V(k-j) - \epsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Récurrance sur les  $\{p_k(\epsilon)\}$  :

$$p_{k+1}(\epsilon) = (2 + V(k) - \epsilon)p_k(\epsilon) - p_{k-1}(\epsilon)$$

avec :  $\begin{cases} p_1(\epsilon) = 1 \\ p_2(\epsilon) = 2 + V(1) - \epsilon \end{cases}$

Évolution du paquet d'onde :

initialement localisé en 1 :  $\langle k | \psi(0) \rangle = \delta(k - 1)$

Temps  $t$  :  $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$

fonction d'onde au site  $k$  :

$$\psi(k, t) = \int_K \phi_\epsilon(1)^* \phi_\epsilon(k) e^{-i\epsilon t} d\tilde{\mu}(\epsilon)$$

$$\psi(k, t) = \int_K |\phi_\epsilon(1)|^2 p_k(\epsilon) e^{-i\epsilon t} d\tilde{\mu}(\epsilon)$$

$$\psi(k, t) = \sum_{j \leq k} c_{j,k} \int_K e^j e^{-i\epsilon t} d\mu(\epsilon)$$

avec  $p_k(x) = \sum_{0 \leq j \leq k} c_{j,k} x^j$  et  $d\mu(\epsilon) = |\phi_\epsilon(1)|^2 d\tilde{\mu}(\epsilon)$ .

Problème réduit à l'étude de :

$$h_k(t) = \int_K e^{-i\epsilon t} \epsilon^k d\mu(\epsilon)$$

avec

$$\psi(k, t) = \sum_{j \leq k} c_{j,k} h_j(t)$$

Moyenne temporelle :  $\frac{1}{t} \int_0^t |\psi(k, t')|^2 dt' \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f_{k,l}(t) &= \Re \left( \frac{1}{t} \int_0^t h_k^*(t') h_l(t') dt' \right) \\ &= \iint_{K \times K} x^k x'^l \operatorname{sinc}((x' - x)t) d\mu(x) d\mu(x') \end{aligned}$$

$h_k(t) = \int_K e^{-i\epsilon t} \epsilon^k d\mu(\epsilon)$  n'est pas une fonction d'échelle  
Mais il y a une structure conservée par  $t \rightarrow \frac{t}{3}$  :

- relation de récurrence entre les  $h_k$
- zéros de  $h_k(t) =$  zéros de  $h_{k-1}(t/3)$

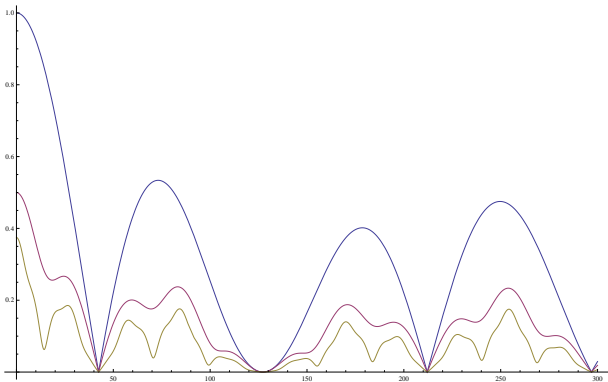


Figure :  $|h_0(t/0)|$  (bleu)  $|h_1(t/3)|$  (rouge) et  $|h_2(t)|$  (jaune)

En moyennant dans le temps, on retrouve le comportement caractéristique (loi de puissance et oscillations log)

$$\begin{aligned} f_{k,l}(t) &= \iint_{K \times K} x^k x'^l \operatorname{sinc}((x' - x)t) d\mu(x) d\mu(x') \\ &= t^{-d_K} \left[ G_{k,l}(\ln t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) \right] \end{aligned}$$

i.e. :

$$f_{k,l}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} f_{k,l}(t/3)$$

et donc :

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\psi(k, t')|^2 dt' \sim t^{-d_K} G_{per}(\ln t)$$

avec  $G_{per}(\ln t)$  de période  $\ln 3$

→ moyenne temporelle du paquet d'onde est asymptotiquement une **fonction d'échelle**.

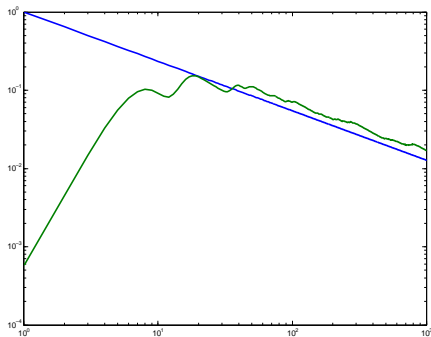
## Conséquences :

- la moyenne temporelle de quantités dynamiques sont aussi, asymptotiquement, fonctions d'échelle
- $\langle \Delta x^2(t) \rangle \sim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha G_{per} \left( \frac{\ln t}{\ln 3} \right)$ , avec  $G_{per}$  non constante

En adaptant les arguments de [1], on trouve :  $\alpha = d_K =$  dimension spectrale.

[1] E. Akkermans, O. Benichou, G. V. Dunne, A. Teplyaev, and R. Voituriez, "Spatial log-periodic oscillations of first-passage observables in fractals", PHYSICAL REVIEW E 86, 061125 (2012)

Simulation numérique du paquet d'onde, modèle tight-binding, pour un spectre de Cantor.

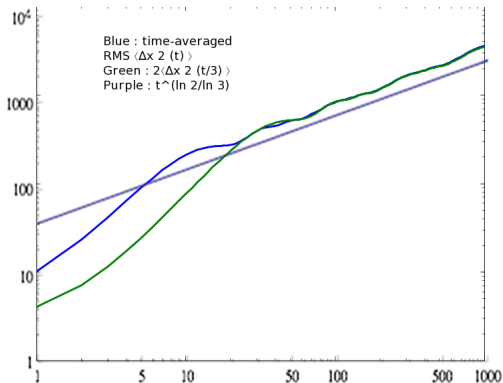




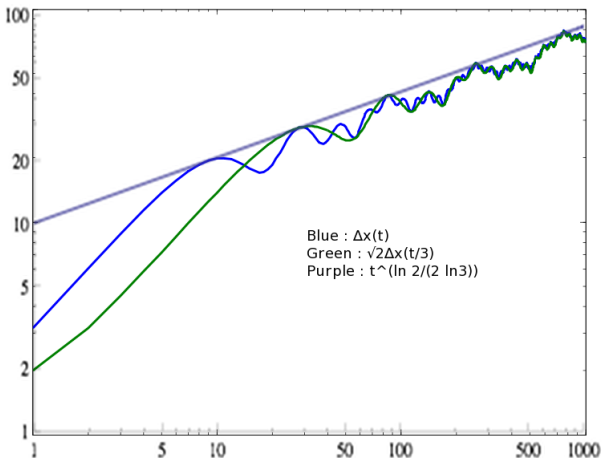
$\langle \Delta x^2(t) \rangle$  pour un spectre de Cantor. Les courbes numériques confirment la relation d'échelle :

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle \sim_{t \rightarrow \infty} 2 \langle \Delta x^2(t/3) \rangle$$

i.e.  $\langle \Delta x^2(t) \rangle \sim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} G_{per}(\ln t)$



Présence également des oscillations log (enveloppe) et de l'exposant  $d_K$  pour la valeur instantannée



Comparaison avec le cas d'un potentiel de Fibonacci (polaritons).

- Obtenir la dimension spectrale locale  $d_f$  avec  $C(t)$
- Vérifier que  $\langle \Delta_{Fibo} x^2(t) \rangle \sim_{t \rightarrow \infty} t^{d_f} G_{per}(\ln t)$

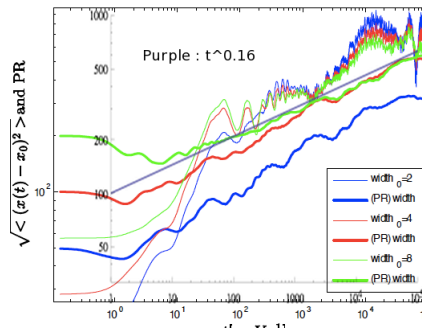
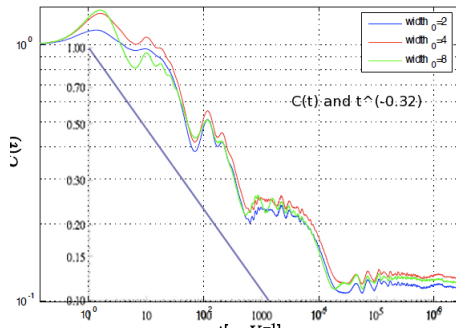


Figure :

Dans le modèle tight-binding, système de taille finie  $N$  sites :

$$\frac{1}{N} \ln |\phi_{\epsilon_n}(1)\phi_{\epsilon_n}(N)| = -\frac{1}{N} \sum_{k \neq n} \ln |\epsilon_k - \epsilon_n| = -\gamma(\epsilon_n) : \text{coef. de Thouless}$$

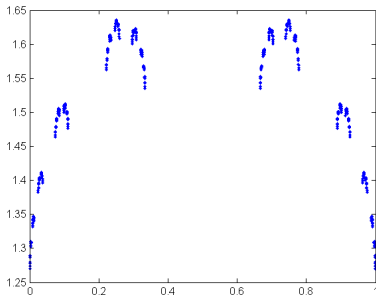


Figure : coefficient de Thouless

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding



# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding

# Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Contexte et résultats antérieurs : spectre de Cantor triadique
- 3 Experience : polaritons en cavité dans un potentiel de Fibonacci
- 4 Le modèle tight-binding
- 5 Conclusion et perspectives

## Conclusion

- Méthode d'étude analytique de systèmes avec structure fractale
- Comportement caractéristique de quantités physique et dynamiques ( $C(t)$ , RMS, Thouless) : loi de puissance + oscillations log
- Moyennage temporel  $\rightarrow$  mise en évidence de la signature fractale
- Vérification expérimentale et numérique

## Perspectives

- Expériences futures (cavité de Fibonacci)
- Émission spontanée d'un atome seul couplé à un spectre fractal
- Superradiance d'un système de deux atomes couplés à un spectre fractal