

Dynamique quantique pour un spectre fractal - applications à des processus simples en électrodynamique et optique quantique

Ariane Soret†

encadrée par Eric Akkermans‡

¹École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France; ²Department of Physics, Technion Israel Institute of Technology, 32000 Haifa, Israel

(Dated: Septembre 2014 - Juillet 2015)

Au cours des dernières décennies, un intérêt croissant a été porté sur les opérateurs de Schrödinger $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})$ dont le spectre est singulier-continu (c'est-à-dire ni discret, ni continu), et qui, bien qu'omniprésents dans divers systèmes physiques (quasi-cristaux par exemple), restent mal compris, contrairement aux cas continus et discrets.

On s'intéresse ici au cas de spectres de Cantor, présentant une symétrie d'échelle. Le point de départ de ce stage furent des résultats expérimentaux et numériques obtenus avec des polaritons dans une cavité de Fibonacci, ayant un spectre de type Cantor, et qui semblent indiquer la présence d'un comportement particulier dû à la symétrie d'échelle du spectre.

L'objectif de mon stage était, tout d'abord, d'étudier sur le plan théorique et analytique la dynamique d'un paquet d'onde régi par un Hamiltonien dont le spectre est un ensemble de Cantor triadique, puis de comparer ces résultats avec l'expérience et de réaliser une modélisation numérique.

Une première étude théorique nous a permis de mettre au point une méthode pour étudier les systèmes avec un spectre fractal auto-similaire, et d'identifier la signature de la structure fractale au travers de quantités physiques décrivant la dynamique du paquet d'onde. En raison de la symétrie d'échelle du spectre, certaines quantités dynamiques sont des fonctions d'échelle, c'est-à-dire de la forme $f(t) = t^\alpha G(\ln t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et G périodique, ou, de façon équivalente, vérifiant une équation fonctionnelle du type : $f(x) = bf(ax)$, comme par exemple la probabilité de retour à l'origine moyennée dans le temps, $C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi(0) | \psi(t') \rangle|^2 dt'$. On a obtenu l'expression analytique exacte de cette quantité pour le spectre de Cantor triadique, et avons montré qu'elle est asymptotiquement de la forme :

$$C(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} t^{-d_K} G\left(\frac{\ln t}{\ln 3}\right)$$

avec $d_K = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ la dimension fractale du Cantor triadique, et G une fonction 1-périodique. Nous avons ensuite concentré notre étude sur le modèle du tight-binding. Dans ce cas, nous avons montré que la dynamique du système repose essentiellement sur les fonctions : $h_k(t) = \int_K e^{-ixt} x^k d\mu$, $k \in \mathbb{Z}$, qui portent la signature fractale du spectre. On montre dans ce cas que le déplacement carré moyen $\langle \Delta x(t) \rangle = \sqrt{\sum_{k \geq 0} k^2 \langle |\psi(k, t)|^2 \rangle}$ est également, pour t suffisamment grand, une fonction d'échelle. Ces prédictions théoriques sont confirmées par les résultats expérimentaux et par la modélisation numérique d'un système avec un spectre de Cantor triadique.

De nouvelles expériences sur les polaritons sont en vue pour affermir les résultats théoriques. On souhaite également appliquer les méthodes développées à d'autres problèmes d'optique quantique, tels l'émission spontanée et la superradiance d'atomes à deux niveaux couplés avec un spectre fractal.

J'ai présenté les résultats obtenus sur la probabilité de retour à l'origine $C(t)$ lors d'une communication au colloque annuel de l'Israel Physics Society (IPS) à Be'er-Sheva, le 21 décembre 2014; les résultats obtenus lors de ce stage font par ailleurs l'objet d'un article qui sera soumis à la revue Journal of Physics A.