

# RMS pour un spectre de Cantor - résultats numériques, point à éclaircir

Ceci rassemble les notes sur le calcul du RMS pour un spectre de Cantor, modèle tight-binding.

Rappel des notations utilisés dans le brouillon du papier :

$$\begin{aligned}\psi(k, t) &= \sum_{j_k=0}^k c_{j_k} h_{j_k}(t) \\ \Delta x(t)^2 &= \sum_{k \geq 1} k^2 |\psi(k, t)|^2 \\ &= \sum_{k \leq 1} k^2 \left| \sum_{j_k=0}^k c_{j_k} h_{j_k}(t) \right|^2 \\ &= \sum_{k \leq 1} k^2 \sum_{j_k, j'_k=0}^k c_{j_k} c_{j'_k} h_{j_k}^*(t) h_{j'_k}(t)\end{aligned}$$

et pour les quantités moyennées dans le temps :

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\psi(k, t')|^2 dt' = \sum_{j_k, j'_k} c_{j_k} c_{j'_k} f_{j_k, j'_k}(t)$$

avec

$$f_{k,l}(t) = \iint x^k x^l \text{sinc}((x' - x)t) d\mu(x) d\mu(x')$$

dont on a montré que :

$$f_{k,l}(t) = t^{-d_K} \left[ G_{k,l}(\ln t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) \right]$$

donc :

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\psi(k, t')|^2 dt' \sim t^{-d_K} G_k(\ln t)$$

En réinjectant l'expression de  $\frac{1}{t} \int_0^t |\psi(k, t')|^2 dt'$  dans la définition de la moyenne temporelle du RMS, on obtient :

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle \sim_{t \rightarrow \infty} t^{-d_K} \sum_{k \geq 0} k^2 G_k(\ln t) \quad (1)$$

avec  $G_k(\ln t)$  périodique de période  $\ln 3$ .

L'équation (1) explique donc bien le comportement asymptotique log-périodique de  $\langle \Delta x^2(t) \rangle$ , que l'on observe numériquement. De plus, en reprenant le calcul de Mantica [1], on peut déduire de la propriété d'échelle de la mesure l'exposant caractéristique de  $\langle \Delta x^2(t) \rangle$ . Cependant, le calcul est assez lourd et je ne l'ai pas terminé

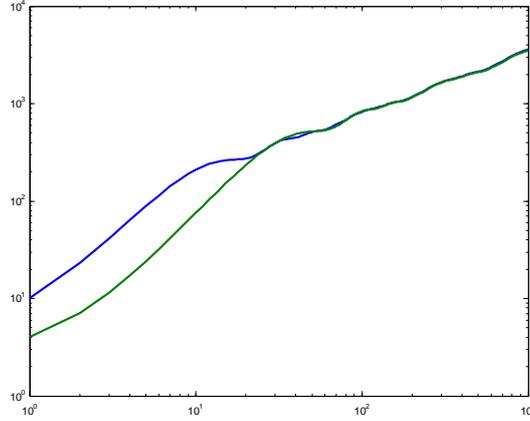


FIGURE 1 – Loglog scale graphs of  $\langle \Delta x^2(t) \rangle$  (blue) and  $2\langle \Delta x^2(t/3) \rangle$  (green)

(je détaillerai dans une prochaine note). Mantica donne néanmoins le résultat pour un ensemble de Cantor dans son papier, sans détailler les étapes : il obtient

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle \sim t^{2d_K}$$

ce qui est en contradiction avec les résultats numériques que j'ai obtenus et qui suggèrent (fig. 1) :

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle \sim t^{d_K}$$

En effet, on observe asymptotiquement que :

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 2\Delta x^2\left(\frac{t}{3}\right)$$

Il reste donc à éclaircir cette contradiction...

[1] G. Mantica, Physica D 109 (1997) 113-127