

Étude des propriétés analytiques de la fonction de Green de l'opérateur de Schrodinger pour le cas où le spectre est un ensemble de Cantor et/ou ensemble de Julia (i.e. pour le second cas : un fermé de \mathbb{R} non connexe, égal à la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs d'une transformation rationnelle $T(z)$).

Position du problème

On considère un système quantique 1D décrit par l'Hamiltonien H . Soit un paquet d'onde modélisé par le ket $|\xi(t)\rangle$, solution de l'équation de Schrodinger $i\partial_t|\xi(t)\rangle = H|\xi(t)\rangle$.

On cherche à étudier différentes quantités, par exemple le comportement du RMS, défini par : $\Delta x(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2 |\xi(x,t)|^2 dx$.

Rappels sur les fonctions de Green et la résolvante

On introduit la résolvante de l'opérateur H : $G(z) = \frac{1}{z-H}$, avec $z \in \mathbb{C}$.

L'état du système à la date t est décrit par : $|\xi(t)\rangle = U(t)|\xi(0)\rangle$ avec $U(t) = e^{-iHt}$ l'opérateur d'évolution.

La fonction de Green du système est définie par :

$$G(x, x', t) = \langle x|U(t)|x'\rangle = \int_{\text{spectre}} \phi(\epsilon, x)^* \phi(\epsilon, x') e^{-i\epsilon t} d\mu(\epsilon)$$

où $\phi(\epsilon, x)$ est la fonction propre de H associée à la valeur propre ϵ et évalué en x . Plus précisément, on introduit les fonctions de Green avancée et retardée :

$$G^{A,R}(t) = \pm \theta(\mp t) e^{-iHt}$$

Leurs transformées de Fourier $G^{A,R}(\epsilon)$:

$$G^{A,R}(x, x', \epsilon) = \int_{\text{spectre}} \frac{\phi(\epsilon', x)^* \phi(\epsilon', x')}{\epsilon - \epsilon' \mp i0} d\mu(\epsilon')$$

sont liées à la résolvante et à l'opérateur d'évolution par :

$$\begin{aligned} U(t) &= G^A(t) - G^R(t) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{spectre}} e^{-i\epsilon t} (G^A(\epsilon) - G^R(\epsilon)) \\ &= \int_{C^+ + C^-} e^{-izt} G(z) dz \end{aligned}$$

où $C^+ + C^-$ est le contour délimité par deux lignes du plan complexe situées juste au-dessus et juste au-dessous de l'axe des réels.

Expression du RMS

On s'intéresse maintenant à comportement du RMS : $\Delta x(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2 |\xi(x,t)|^2 dx$.

Considérons un paquet d'onde, localisé à $t = 0$ en $x = x_0$: $\langle x|\xi(t=0)\rangle = \delta(x - x_0)$. Après un temps t , le système est dans l'état : $|\xi(t)\rangle = U(t)|\xi(0)\rangle$ Puis :

$$|\xi(x,t)| = |\langle x|\xi(t)\rangle| = |\langle x|U(t)|\xi(0)\rangle| = |\langle x|U(t)|x_0\rangle|$$

Or :

$$\langle x|U(t)|x_0\rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+ + C^-} G(x, x_0, z) e^{-izt} dz$$

et

$$G(x, x_0, z) = \int_{\text{spectre}} \frac{\phi(\epsilon, x)^* \phi(\epsilon, x_0)}{z - \epsilon} d\mu(\epsilon)$$

Il s'agit donc d'étudier la fonction $G(x, x_0, z)$ afin de remonter au RMS.

Cas d'un ensemble de Julia : utilisation de l'invariance du spectre par $T(z)$

On a supposé que le spectre est un ensemble de Julia ; il est stable par une transformation rationnelle, associée à une fraction rationnelle $T(z)$. Supposons de plus que $T(z)$ est un polynôme de degré N .

Introduisons la fonction définie sur \mathbb{C} :

$$g(z) = \int_{\text{spectre}} \ln(z - \epsilon) d\mu(\epsilon)$$

(appelée selon le contexte potentiel de la mesure μ , fonction de Lyapunov ou encore coefficient de Thouless), et sa dérivée

$$g'(z) = \int_{\text{spectre}} \frac{d\mu(\epsilon)}{z - \epsilon}$$

D'après [1], [2], $g'(z)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$g'(z) = \frac{T'(z)}{N} g'(T(z))$$

Dans le cas $T(z) = z^2 - \lambda$, cela implique ([1], p.89), au voisinage des points fixes a , le comportement suivant (mais j'ai encore du mal avec le détail du calcul qui conduit à ce résultat) :

$$g'(z - a) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_m^n (z - a)^{\ln 2 / \ln(2a) + n} \cos(2\pi m \ln(z - a) / \ln 2 + \psi_m^n)$$

En adaptant le calcul pour $G(x, x_0, z)$ définie précédemment, on devrait parvenir à des résultats intéressants.

Notons de plus qu'il est possible de construire des ensemble de Julia qui soient aussi des Cantor, i.e. homéomorphes à un ensemble de Cantor triadique ; l'argument pourrait donc s'adapter au cas de la cavité de Fibonacci.

Cas où le spectre est un ensemble de Cantor triadique

On suppose ici que le spectre est un ensemble de Cantor triadique K . On dispose alors de la relation suivante : pour toute fonction f définie sur K :

$$\int_K f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x}{3}\right) d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x+2}{3}\right) d\mu(x)$$

Supposons que cette propriété est vérifiée localement en tout point de l'espace, i.e. que la mesure : $d\tilde{\mu}(\epsilon) = \phi(x_0, \epsilon) * \phi(x, \epsilon) d\mu(\epsilon)$ vérifie la même propriété, quitte à ajouter des coefficients correctifs.

Alors :

$$G(x, x_0, z) = \frac{3}{2} G(x, x_0, 3z) + \frac{3}{2} G(x, x_0, 3z - 2)$$

puis

$$|U(t)| = \left| \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right| \left| U\left(\frac{t}{3}\right) \right|$$

ce qui conduit à :

$$\Delta x(t) = \left| \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right| \Delta x\left(\frac{t}{3}\right)$$

Il faudrait un calcul plus fin pour prendre en compte le caractère local de $d\tilde{\mu}(\epsilon)$.

Synthèse des deux hypothèses : spectre de Julia homéomorphe à un ensemble de Cantor

Supposons maintenant que le spectre est un ensemble de Cantor et de Julia, i.e. un ensemble de Cantor égal à la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs d'une transformation rationnelle $T(z)$.

Dans ce cas, on peut exprimer les fonctions propres $\phi(\epsilon, x)$ à partir de $T(z)$ ([2]); mais j'ai encore du mal à comprendre la démonstration de ceci.

Admettant ce résultat, on peut remplacer dans $G(x, x_0, z) = \int_{\text{spectre}} \frac{\phi(\epsilon, x)^* \phi(\epsilon, x_0)}{z - \epsilon} d\mu(\epsilon)$ les termes $\phi(\epsilon, x)^* \phi(\epsilon, x_0)$ par des itérées de $T(z)$, et utiliser l'invariance du spectre par $T(z)$ selon les méthodes développées en [1] pour obtenir des résultats plus précis que ceux du paragraphe précédent.

Les calculs font appel à de l'analyse complexe assez poussée, que je ne maîtrise pas assez pour le moment. Mais je pense que l'utilisation des propriétés des ensembles de Julia pour étudier les spectres types Cantor peut-être intéressant en général, et j'essaye pour le moment de mieux comprendre comment mener ce type de calculs pour pouvoir l'appliquer à divers problèmes (cavité de Fibonacci et superradiance, qui repose essentiellement sur l'étude de la résolvante).

Références

- [1] D. Bessis, J. S. Geronimo and P. Moussa I, Journal of Statistical Physics, Vol. 34, Nos. 1/2, 1984
- [2] M. F. Barnsley, J. S. Geronimo, and A. N. Harrington, Commun. Math. Phys. 99, 303-317 (1985)