

Sur l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »

Luis BÁEZ-DUARTE, Michel BALAZARD, Bernard LANDREAU et Eric SAIAS

Le texte qui suit est un document de travail, contenant les prérequis et les détails des calculs menant aux résultats de notre article,

Étude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »

à paraître au Ramanujan Journal.

Table des matières

1	Transformation de Mellin	3
1.1	Convergence absolue	3
1.2	Transformation de Mellin-Plancherel	6
2	La fonction « partie fractionnaire »	7
2.1	Une formule sommatoire	7
2.2	La fonction « partie fractionnaire »	8
2.3	Fonctions de Bernoulli	10
3	Sur la fonction Γ	13
4	Sommes de Vassiouline	16
5	Somme des inverses des termes d'une progression arithmétique	22
6	La fonction d'Estermann	25
6.1	Définitions et propriétés fondamentales	25
6.2	Les fonctions Esin et Ecos	26
6.3	Les fonctions G_0 et G_1	28
7	Les fonctions φ_n	31
7.1	Définition de φ_n pour $n \geq 2$	31
7.2	La fonction φ_1	31
7.3	Majoration du module de continuité de φ_2	32
7.4	Transformée de Mellin de $\varphi_2(p/q + t) - \varphi_2(p/q)$	33
7.5	Comportement de φ_2 au voisinage d'un nombre rationnel	35
8	L'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(0, +\infty; t^{-2}dt)$	36
8.1	Dilatations dans \mathcal{H}	36
8.2	Fonctions d'autocorrélation	36
9	L'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »	38
9.1	Définition et premières propriétés de la fonction $A(\lambda)$	38
9.2	Première relation entre A et φ_1	38
9.3	Représentation graphique de la fonction $A(\lambda)$	39
9.4	Deuxième relation entre A et φ_1	39
9.5	Développement asymptotique de $A(\lambda)$ au voisinage d'un nombre rationnel	41

1 Transformation de Mellin

1.1 Convergence absolue

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , et $\mathcal{W}(a, b)$ l'espace vectoriel des fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$, mesurables au sens de Lebesgue, et telles que, pour tout $\sigma \in]a, b[$,

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|x^{\sigma-1}dx < +\infty.$$

Observons que $\mathcal{W}(a, b) \subset \mathcal{W}(a', b')$ si $]a', b'[\subset]a, b[$.

Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$, la **transformée de Mellin** de f est la fonction Mf définie par

$$Mf(s) := \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx.$$

Elle est définie et holomorphe dans la bande verticale $a < \Re s < b$ (qui peut être un demi-plan, ou même le plan tout entier). Elle est bornée dans toute bande verticale $\alpha \leq \Re s \leq \beta$, où $a < \alpha \leq \beta < b$.

Proposition 1 (Injectivité de la transformation de Mellin) *Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$ et $Mf = 0$, alors $f = 0$ p.p.*

Exemples

- $f(x) = e^{-x}$; $f \in \mathcal{W}(0, +\infty)$ et $Mf(s) = \Gamma(s)$.
- $f(x) = \sin x$; $f \in \mathcal{W}(-1, 0)$ et $Mf(s) = \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s)$.
- $f(x) = \cos x - 1$; $f \in \mathcal{W}(-2, 0)$ et $Mf(s) = \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s)$.
- Posons

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\rho}(\log x)^k & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x > 1, \end{cases}$$

où $\rho \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a : $f \in \mathcal{W}(\Re \rho, +\infty)$ et

$$Mf(s) = \frac{(-1)^k k!}{(s - \rho)^{k+1}}.$$

On constate que Mf est une fraction rationnelle et que $f(x) = \text{Res}(Mf(s)x^{-s}, \rho)$ pour $0 < x \leq 1$.

- Posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1, \\ x^{-\rho}(\log x)^k & x > 1, \end{cases}$$

où $\rho \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a : $f \in \mathcal{W}(-\infty, \Re \rho)$ et

$$Mf(s) = -\frac{(-1)^k k!}{(s - \rho)^{k+1}}.$$

On constate que Mf est l'opposée de la fraction rationnelle précédente et que $f(x) = -\text{Res}(Mf(s)x^{-s}, \rho)$ pour $x > 1$

Appelons polynôme généralisé toute somme finie

$$\sum cx^{-\rho}(\log x)^k, \tag{1}$$

où les c et les ρ sont des nombres complexes, et les k des nombres entiers naturels. Associons à ce polynôme généralisé la fraction rationnelle

$$F(s) := \sum c \frac{(-1)^k k!}{(s - \rho)^{k+1}}.$$

C'est une fraction rationnelle nulle à l'infini. Inversement, toute fraction rationnelle nulle à l'infini s'écrit sous cette forme et on peut lui associer le polynôme généralisé (1). La correspondance ainsi définie est bijective et les deux derniers exemples conduisent à la proposition suivante.

Proposition 2 Soit

$$P(x) = \sum cx^\rho (\log x)^k$$

un polynôme généralisé, et

$$F(s) := \sum c \frac{(-1)^k k!}{(s - \rho)^{k+1}}$$

la fraction rationnelle associée. On pose $a = \min \Re \rho$ et $b = \max \Re \rho$.

On a, pour tout $x > 0$,

$$P(x) = \sum_{\rho} \text{Res}(F(s)x^{-s}, \rho),$$

où la somme porte sur les pôles de F .

D'autre part, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} P(x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1, \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{W}(b, +\infty)$ et vérifie $Mf = F$; et la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1 \\ P(x) & x > 1, \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{W}(-\infty, a)$ et vérifie $Mg = -F$.

Proposition 3 Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$ et $\rho \in \mathbb{C}$, alors la fonction g définie par $g(t) := t^\rho f(t)$ appartient à $\mathcal{W}(a - \Re \rho, b - \Re \rho)$ et

$$Mg(s) = Mf(s + \rho).$$

Proposition 4 Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$, alors la fonction g définie par $g(t) := f(1/t)$ appartient à $\mathcal{W}(-b, -a)$ et

$$Mg(s) = Mf(-s).$$

Proposition 5 Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$, alors $\overline{f} \in \mathcal{W}(a, b)$ et

$$M\overline{f}(s) = (Mf)^*(s) := \overline{Mf(\overline{s})}.$$

Proposition 6 Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$ et $\lambda > 0$, alors la fonction g définie par $g(t) = f(\lambda t)$ appartient à $\mathcal{W}(a, b)$ et

$$Mg(s) = \lambda^{-s} Mf(s).$$

Proposition 7 Si f et g appartiennent à $\mathcal{W}(a, b)$, la fonction $f * g$ définie presque partout par

$$f * g(x) := \int_0^{+\infty} f(t)g(x/t) \frac{dt}{t},$$

appartient à $\mathcal{W}(a, b)$ et vérifie

$$M(f * g) = Mf \cdot Mg.$$

Observons que $f * g$ est continue si f ou g est continue et à support compact dans $]0, +\infty[$.

Exemples

- Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$ et

$$g(x) = \begin{cases} x^{-\rho} & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x > 1, \end{cases}$$

où $\Re \rho \leq a$, alors

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_x^{+\infty} f(t) \left(\frac{x}{t}\right)^{-\rho} \frac{dt}{t} \\ &= x^{-\rho} \int_x^{+\infty} f(t) t^{\rho-1} dt. \end{aligned}$$

On a $f * g \in \mathcal{W}(a, b)$ et

$$M(f * g)(s) = \frac{Mf(s)}{s - \rho}.$$

• Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$ et

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1, \\ x^{-\rho} & x > 1, \end{cases}$$

où $\Re \rho \geq b$, alors

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_0^x f(t) \left(\frac{x}{t}\right)^{-\rho} \frac{dt}{t} \\ &= x^{-\rho} \int_0^x f(t) t^{\rho-1} dt. \end{aligned}$$

On a $f * g \in \mathcal{W}(a, b)$ et

$$M(f * g)(s) = -\frac{Mf(s)}{s - \rho}.$$

Proposition 8 Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$ et si les nombres complexes c_k et les nombres réels positifs λ_k sont tels que

$$\sum |c_k| \lambda_k^{-\sigma} < +\infty$$

pour tout $\sigma \in]a, b[$, alors la fonction g définie presque partout par

$$g(t) = \sum c_k f(\lambda_k t)$$

appartient à $\mathcal{W}(a, b)$ et vérifie

$$Mg(s) = Mf(s) \cdot \sum c_k \lambda_k^{-s}.$$

Proposition 9 (Inversion de Mellin) Soit $f \in \mathcal{W}(a, b)$. L'ensemble des $c \in]a, b[$ tels que $\tau \mapsto Mf(c + i\tau)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ est un intervalle (éventuellement vide). Si c est choisi dans cet ensemble, on a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=c} Mf(s) t^{-s} ds \quad p.p.$$

Nous dirons d'une fonction $F(s)$ méromorphe dans la bande verticale $a < \Re s < b$ qu'elle est à **croissance polynômiale** si elle n'a qu'un nombre fini de pôles et si, pour tous α, β tels que $a < \alpha \leq \beta < b$, existent deux nombres réels $T_0 > 0$ et K , pouvant dépendre de α et β , tels que

$$|F(\sigma + i\tau)| \leq |\tau|^K, \quad \alpha \leq \sigma \leq \beta, |\tau| \geq T_0.$$

Proposition 10 Soit $]a, b[$ et $]a', b'[$ deux intervalles ouverts non vides, avec $b \leq a'$. Soit $F(s)$ une fonction méromorphe et à croissance polynômiale dans la bande verticale $a < \Re s < b'$. Soit enfin $f \in \mathcal{W}(a, b)$ et $g \in \mathcal{W}(a', b')$ deux fonctions telles que

$$Mf(s) = F(s), \quad a < \Re s < b;$$

$$Mg(s) = F(s), \quad a' < \Re s < b'.$$

Alors $g(t) - f(t)$ coïncide presque partout avec le polynôme généralisé

$$P(t) = \sum_{\rho} \text{Res}(F(s) t^{-s}, \rho),$$

où la somme porte sur les pôles de F .

Démonstration

Soit $A(s)$ la fraction rationnelle obtenue en ajoutant les parties polaires de $F(s)$ en tous ses pôles. On a :

$$\operatorname{Res}(F(s)t^{-s}, \rho) = \operatorname{Res}(A(s)t^{-s}, \rho)$$

pour tout $t > 0$ et tout pôle ρ de F .

D'après la proposition 2, la fonction $g - P\chi_{(0,1)}$ appartient à $\mathcal{W}(a', b')$ et admet $F - A$ comme transformée de Mellin ; et la fonction $f + P\chi_{(1,+\infty)}$ appartient à $\mathcal{W}(a, b)$ et admet $F - A$ comme transformée de Mellin. D'autre part, $F - A$ est holomorphe et à croissance polynômiale dans la bande $a < \Re s < b'$. Si le résultat est connu dans le cas où F est holomorphe, le cas général en découle donc.

Supposons donc F holomorphe. Comme F est une transformée de Mellin dans les deux bandes verticales $a < \Re s < b$ et $a' < \Re s < b'$, le principe de Phragmen-Lindelöf prouve que F est bornée dans toute bande verticale $\alpha \leq \Re s \leq \beta$, où $a < \alpha \leq \beta < b'$. Soit φ une fonction deux fois continûment dérivable et à support compact dans $]0, +\infty[$; les fonctions $\varphi * f$ et $\varphi * g$ appartiennent respectivement à $\mathcal{W}(a, b)$ et $\mathcal{W}(a', b')$ et ont pour transformées de Mellin $F(s) \cdot M\varphi(s)$ dans les deux cas. Comme $M\varphi(s)$ est $O((1 + |\tau|)^{-2})$ sur toute droite verticale (et même uniformément dans toute bande verticale de largeur finie), la formule d'inversion de Mellin donne pour presque tout t

$$(f * \varphi)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=c} M\varphi(s) \cdot F(s)t^{-s} ds, \quad a < c < b,$$

et

$$(g * \varphi)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=c'} M\varphi(s) \cdot F(s)t^{-s} ds, \quad a' < c' < b'.$$

Le théorème de Cauchy prouve alors que $(f * \varphi)(t) = (g * \varphi)(t)$ presque partout, et même pour tout t , par continuité. Comme cette égalité est valable pour toute φ , on a $f(t) = g(t)$ p.p. \square

1.2 Transformation de Mellin-Plancherel

Soit $f \in L^2(0, +\infty)$. Pour $T > 1$, posons :

$$F_T(s) := \int_{1/T}^T f(t)t^{s-1} dt.$$

La restriction de F_T à la droite $\Re s = 1/2$ appartient à $L^2(1/2 + \mathbb{R}i; d\tau/2\pi)$ et, dans cet espace, F_T a une limite quand T tend vers l'infini. Nous noterons encore $Mf(s)$ cette fonction, dite **transformée de Mellin-Plancherel** de f (ou simplement : transformée de Mellin), définie presque partout sur la droite $\Re s = 1/2$. Le théorème de Plancherel affirme que l'application $f \mapsto Mf$ est un opérateur unitaire entre les deux espaces de Hilbert $L^2(0, +\infty)$ et $L^2(1/2 + \mathbb{R}i; d\tau/2\pi)$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit plus généralement la transformation de Mellin-Plancherel sur l'espace $L^2(0, +\infty; t^\alpha dt)$, à valeurs dans $L^2((\alpha + 1)/2 + \mathbb{R}i; d\tau/2\pi)$. C'est encore un opérateur unitaire.

2 La fonction « partie fractionnaire »

2.1 Une formule sommatoire

La proposition suivante* illustre un principe général de symétrie.

Proposition 11 *Soit θ et x deux nombres réels positifs, $f(n)$ une fonction à valeurs complexes, définie pour n entier, $0 \leq n \leq \theta x$, et $g(m)$ une fonction à valeurs complexes, définie pour m entier, $0 \leq m \leq x$. On suppose de plus que $f(0) = g(0) = 0$.*

Si θ est irrationnel, on a

$$\sum_{1 \leq m \leq x} f(\lfloor m\theta \rfloor)(g(m) - g(m-1)) + \sum_{1 \leq n \leq \theta x} g(\lfloor n/\theta \rfloor)(f(n) - f(n-1)) = f(\lfloor \theta x \rfloor)g(\lfloor x \rfloor).$$

Si $\theta = p/q$, où p et q sont des nombres entiers positifs premiers entre eux, ce résultat est à remplacer par

$$f(\lfloor \theta x \rfloor)g(\lfloor x \rfloor) + \sum_{1 \leq k \leq x/q} (g(kq) - g(kq-1))(f(kp) - f(kp-1)).$$

Démonstration

Voyons d'abord comment le résultat pour p/q découle du cas où θ est irrationnel. Faisons tendre θ vers p/q par valeurs supérieures et irrationnelles. La limite de

$$\sum_{1 \leq m \leq x} f(\lfloor m\theta \rfloor)(g(m) - g(m-1)) - f(\lfloor \theta x \rfloor)g(\lfloor x \rfloor)$$

s'obtient en remplaçant θ par p/q , alors que celle de

$$\sum_{1 \leq n \leq \theta x} g(\lfloor n/\theta \rfloor)(f(n) - f(n-1))$$

vaut

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq n \leq px/q \\ nq/p \notin \mathbb{N}}} g(\lfloor nq/p \rfloor)(f(n) - f(n-1)) + \sum_{\substack{1 \leq n \leq px/q \\ nq/p \in \mathbb{N}}} g\left(\frac{nq}{p} - 1\right)(f(n) - f(n-1)) \\ &= \sum_{1 \leq n \leq px/q} g(\lfloor nq/p \rfloor)(f(n) - f(n-1)) + \sum_{\substack{1 \leq n \leq px/q \\ nq/p \in \mathbb{N}}} \left(g\left(\frac{nq}{p} - 1\right) - g\left(\frac{nq}{p}\right)\right)(f(n) - f(n-1)). \end{aligned}$$

La dernière somme se réécrit en posant $n = kp$:

$$\sum_{k \leq x/q} (g(kq-1) - g(kq))(f(kp) - f(kp-1)),$$

d'où le résultat.

Si θ est irrationnel, on a :

$$\sum_{1 \leq m \leq x} f(\lfloor m\theta \rfloor)(g(m) - g(m-1)) = \sum_{0 \leq n \leq \theta x} f(n) \sum_{\substack{1 \leq m \leq x \\ \lfloor m\theta \rfloor = n}} (g(m) - g(m-1)).$$

Or

$$\begin{aligned} \lfloor m\theta \rfloor = n &\Leftrightarrow n \leq m\theta < n+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{\theta} \leq m < \frac{n+1}{\theta} \\ &\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{\theta} \right\rfloor + 1 \leq m < \left\lfloor \frac{n+1}{\theta} \right\rfloor. \end{aligned}$$

*Cf. Lemma 7 dans : G. H. HARDY ET J. E. LITTLEWOOD, *Some problems of Diophantine approximation : The lattice-points of a right-angled triangle (Second memoir)*, Abh. Math. Sem. Hamb. Un. **1** (1922), 212-249.

Si $n \leq \theta x - 1$, cet encadrement entraîne que $m \leq x$, alors que si $n = \lfloor \theta x \rfloor$ on a

$$\begin{aligned} \lfloor m\theta \rfloor = n \quad \text{et} \quad m \leq x &\Leftrightarrow n \leq m\theta < n+1 \quad \text{et} \quad m \leq x \\ &\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{\theta} \right\rfloor + 1 \leq m \leq \lfloor x \rfloor. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ \lfloor m\theta \rfloor = n}} (g(m) - g(m-1)) = \begin{cases} g\left(\left\lfloor \frac{n+1}{\theta} \right\rfloor\right) - g\left(\left\lfloor \frac{n}{\theta} \right\rfloor\right) & \text{si } n \leq \theta x - 1, \\ g(\lfloor x \rfloor) - g\left(\left\lfloor \frac{n}{\theta} \right\rfloor\right) & \text{si } n = \lfloor \theta x \rfloor. \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq n \leq \theta x} f(n) \sum_{\substack{1 \leq m \leq x \\ \lfloor m\theta \rfloor = n}} (g(m) - g(m-1)) &= \sum_{0 \leq n \leq \theta x - 1} f(n) \left(g\left(\left\lfloor \frac{n+1}{\theta} \right\rfloor\right) - g\left(\left\lfloor \frac{n}{\theta} \right\rfloor\right) \right) \\ &\quad + f(\lfloor \theta x \rfloor) \left(g(\lfloor x \rfloor) - g\left(\left\lfloor \frac{\lfloor \theta x \rfloor}{\theta} \right\rfloor\right) \right) \\ &= g(\lfloor x \rfloor) f(\lfloor \theta x \rfloor) + \sum_{1 \leq n \leq \theta x} g(\lfloor n/\theta \rfloor) (f(n-1) - f(n)), \end{aligned}$$

comme annoncé. □

En prenant $f(n) = g(n) = n$ dans la proposition 11, on obtient en particulier le résultat suivant[†].

Proposition 12 *Soit x et θ deux nombres réels positifs. La quantité*

$$\sum_{1 \leq m \leq x} \lfloor m\theta \rfloor + \sum_{1 \leq n \leq \theta x} \lfloor n/\theta \rfloor$$

vaut $\lfloor x \rfloor \lfloor \theta x \rfloor$ si θ est irrationnel, et $\lfloor x \rfloor \lfloor \theta x \rfloor + \lfloor x/q \rfloor$ si $\theta = p/q$, avec $p \in \mathbb{N}^$, $q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$.*

2.2 La fonction « partie fractionnaire »

La **partie fractionnaire** du nombre réel x est l'unique nombre réel $u \in [0, 1[$ tel que $x - u$ soit entier. On note

$$\{x\} := u = x - \lfloor x \rfloor,$$

car l'entier $x - u$ est nécessairement la partie entière de x .

On dispose donc d'une fonction « partie fractionnaire » : $\{ \} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1[$.

Proposition 13 *La fonction « partie fractionnaire » est l'unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, périodique de période 1, et vérifiant $f(x) = x$ pour $0 \leq x < 1$.*

La fonction « partie fractionnaire » possède donc une série de Fourier

$$\frac{1}{2} - \sum_{n \neq 0} \frac{e^{i2\pi nx}}{i2\pi n},$$

qu'on peut récrire sous la forme

$$\frac{1}{2} - \sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}.$$

[†]J. J. SYLVESTER, *Sur la fonction $E(x)$* , C. R. A. S. **50** (1860), 732-734.

Proposition 14 On a

$$\frac{1}{2} - \sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \notin \mathbb{Z}; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

De plus[‡], pour tout nombre entier N on a

$$0 < \sum_{n=1}^N \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} < \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 0,589\dots, \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Proposition 15 Pour $x \geq 0$, on a

$$\sum_{n \leq x} n = \frac{x^2}{2} - x(\{x\} - 1/2) + \frac{\{x\}^2}{2} - \frac{\{x\}}{2}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} n &= \frac{\lfloor x \rfloor (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} \\ &= \frac{(x - \{x\})(x - \{x\} + 1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2\{x\}x + \{x\}^2 + x - \{x\}) \\ &= \frac{x^2}{2} - x(\{x\} - 1/2) + \frac{\{x\}^2}{2} - \frac{\{x\}}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

Évaluons maintenant une intégrale du type de Frullani faisant intervenir la fonction « partie fractionnaire ».

Proposition 16 Soit x et θ deux nombres réels positifs. On a

$$\int_0^x t^{-2}(\{\theta t\} - \theta\{t\})dt = \theta \log \frac{1}{\theta} + \theta \int_x^{\theta x} u^{-2}\{u\}du.$$

Démonstration

Posons $\alpha = \min(1, 1/\theta)$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{-2}(\{\theta t\} - \theta\{t\})dt &= \int_\alpha^x t^{-2}(\{\theta t\} - \theta\{t\})dt \\ &= \int_\alpha^x t^{-2}\{\theta t\}dt - \theta \int_\alpha^x t^{-2}\{t\}dt \\ &= \theta \left(\int_{\theta\alpha}^{\theta x} u^{-2}\{u\}du - \int_\alpha^x u^{-2}\{u\}du \right) \\ &= \theta \left(\int_{\theta\alpha}^\alpha u^{-2}\{u\}du + \int_x^{\theta x} u^{-2}\{u\}du \right) \\ &= \theta \log \frac{1}{\theta} + \theta \int_x^{\theta x} u^{-2}\{u\}du. \end{aligned} \quad \square$$

[‡]T. H. GRONWALL, *Über die Gibbsche Erscheinung und die trigonometrischen Summen* $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx$, Math. Annalen **72** (1912), 228-243.

2.3 Fonctions de Bernoulli

On définit les **polynômes de Bernoulli** $b_n(x)$, $n \geq 1$, par l'identité formelle

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

On a par exemple

$$\begin{aligned} b_0(x) &= 1 \\ b_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\ b_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\ b_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{x}{2} \\ b_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Les **fonctions de Bernoulli** $B_n(x)$ sont les fonctions de variable réelle, de période 1, définies par

$$B_1(x) = \begin{cases} \{x\} - \frac{1}{2} & \text{si } x \notin \mathbb{Z}; \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$B_n(x) = b_n(\{x\}).$$

Proposition 17 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$B_1(x) = \frac{\{x\} - \{-x\}}{2}.$$

Proposition 18 B_n a la parité de n :

$$B_n(-x) = (-1)^n B_n(x).$$

Proposition 19 Pour $n \geq 2$, on a

$$B_n(x) = \int_0^x nB_{n-1}(t)dt + B_n(0).$$

Par conséquent, B_n est de classe C^{n-2} .

Proposition 20 Pour $n \geq 1$, la série de Fourier de B_n est

$$-n! \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i2\pi kx}}{(i2\pi k)^n};$$

elle converge pour tout x vers $B_n(x)$.

Proposition 21 Soit x et θ deux nombres réels positifs. On a

$$\sum_{1 \leq n \leq \theta x} B_1(n/\theta) + \sum_{1 \leq m \leq x} B_1(m\theta) = \frac{1}{2\theta} (\{\theta x\} - \theta\{x\})^2 + \frac{\theta - 1}{2\theta} (\{\theta x\} - \theta\{x\}).$$

Démonstration

Commençons par supposer θ irrationnel. Nous aurons, d'après les propositions 12 et 15,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq n \leq \theta x} B_1(n/\theta) + \sum_{1 \leq m \leq x} B_1(m\theta) &= \sum_{1 \leq n \leq \theta x} \left(n/\theta - [n/\theta] - \frac{1}{2} \right) + \sum_{1 \leq m \leq x} \left(m\theta - [m\theta] - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\theta} \left(\frac{(\theta x)^2}{2} - \theta x(\{\theta x\} - 1/2) + \frac{\{\theta x\}^2}{2} - \frac{\{\theta x\}}{2} \right) + \\
&\quad + \theta \left(\frac{x^2}{2} - x(\{x\} - 1/2) + \frac{\{x\}^2}{2} - \frac{\{x\}}{2} \right) + \\
&\quad - [x][\theta x] - \frac{1}{2}[\theta x] - \frac{1}{2}[x] \\
&= \theta \frac{x^2}{2} - x\{\theta x\} + \frac{x}{2} + \frac{\{\theta x\}^2}{2\theta} - \frac{\{\theta x\}}{2\theta} + \\
&\quad + \theta \frac{x^2}{2} - \theta x\{x\} + \theta \frac{x}{2} + \theta \frac{\{x\}^2}{2} - \theta \frac{\{x\}}{2} + \\
&\quad - (x - \{x\})(\theta x - \{\theta x\}) - \frac{1}{2}(\theta x - \{\theta x\}) - \frac{1}{2}(x - \{x\}).
\end{aligned}$$

On constate que tous les termes où x apparaît sans accolades $\{ \}$ s'éliminent. Il reste la quantité suivante :

$$\frac{\theta}{2}\{x\}^2 + \frac{1}{2\theta}\{\theta x\}^2 - \{x\}\{\theta x\} + \frac{\theta - 1}{2\theta}\{\theta x\} + \frac{1 - \theta}{2}\{x\},$$

qui est bien égale à celle apparaissant dans l'énoncé.

Si θ est rationnel, $\theta = p/q$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$, on a

$$n/\theta \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 1 \leq n \leq \theta x \iff \frac{n}{p} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 1 \leq \frac{n}{p} \leq \frac{x}{q},$$

et

$$m\theta \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 1 \leq m \leq x \iff \frac{m}{q} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 1 \leq \frac{m}{q} \leq \frac{x}{q}.$$

Il faut donc ajouter $[x/q]$ au second membre de la première ligne du calcul ci-dessus. Mais en vertu de la proposition 12, on retranchera $[x/q]$ lors de l'étape suivante, ce qui fait que le résultat est inchangé. \square

Proposition 22 *Soit x et θ deux nombres réels positifs. On a*

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq m \leq x} \frac{B_1(m\theta)}{m} + \theta \sum_{1 \leq n \leq \theta x} \frac{B_1(n/\theta)}{n} &= \frac{\theta}{2} \int_0^x \{t\}^2 t^{-2} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\theta x} \{t\}^2 t^{-2} dt - \int_0^x \{t\}\{\theta t\} t^{-2} dt + \\
&\quad + \frac{\theta - 1}{2} \log \frac{1}{\theta} + \frac{\theta - 1}{2} \int_x^{\theta x} \{t\} t^{-2} + \frac{1}{2\theta x} (\{\theta x\} - \theta\{x\})^2 + \frac{\theta - 1}{2\theta x} (\{\theta x\} - \theta\{x\}).
\end{aligned}$$

Démonstration

Posons

$$S_\theta(x) := \sum_{1 \leq m \leq x} B_1(m\theta).$$

La somme à évaluer peut s'écrire au moyen d'intégrales de Stieltjes :

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^{-1} dS_\theta(t) + \theta \int_0^{\theta x} t^{-1} dS_{1/\theta}(t) &= \int_0^x u^{-1} d(S_\theta(u) + S_{1/\theta}(\theta u)) \\
&= \frac{S_\theta(x) + S_{1/\theta}(\theta x)}{x} + \int_0^x u^{-2} (S_\theta(u) + S_{1/\theta}(\theta u)) du.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 21, on a

$$S_\theta(x) + S_{1/\theta}(\theta x) = \frac{1}{2\theta}(\{\theta x\} - \theta\{x\})^2 + \frac{\theta - 1}{2\theta}(\{\theta x\} - \theta\{x\}).$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^x u^{-2}(\{\theta u\} - \theta\{u\})^2 du &= \int_0^x u^{-2}\{\theta u\}^2 du - 2\theta \int_0^x u^{-2}\{u\}\{\theta u\} du + \theta^2 \int_0^x u^{-2}\{u\}^2 du \\ &= \theta \int_0^{\theta x} u^{-2}\{u\}^2 du + \theta^2 \int_0^x u^{-2}\{u\}^2 du - 2\theta \int_0^x u^{-2}\{u\}\{\theta u\} du; \end{aligned}$$

avec la proposition 16, cela fournit le résultat annoncé. □

3 Sur la fonction Γ

Nous rappelons dans ce chapitre[§] quelques propriétés de la fonction Γ , de son logarithme, et de sa dérivée logarithmique

$$\psi(z) := \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z).$$

Proposition 23 *La fonction ψ est méromorphe dans le plan complexe. Ses pôles sont les nombres entiers négatifs ou nuls $-n$, $n \in \mathbb{N}$, et on a pour tout autre nombre complexe z*

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+z)},$$

où γ est la constante d'Euler[¶].

Proposition 24 *Pour $z \in \mathbb{C}$, $-z \notin \mathbb{N}$, on a*

$$\psi'(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+z)^2}.$$

Proposition 25 *Pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier positif tels que $-nz \notin \mathbb{N}$, on a*

$$\log \Gamma(nz) = -\frac{n-1}{2} \log 2\pi + \left(nz - \frac{1}{2}\right) \log n + \sum_{k=0}^{n-1} \log \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right);$$

en particulier,

$$\sum_{k=1}^n \log \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n-1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log n.$$

Proposition 26 *Pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier positif tels que $-nz \notin \mathbb{N}$, on a*

$$\psi(nz) = \log n + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi\left(z + \frac{k}{n}\right);$$

en particulier,

$$\sum_{k=1}^n \psi\left(\frac{k}{n}\right) = -n(\log n + \gamma).$$

Proposition 27 *On a*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log \Gamma(x) dx &= \frac{1}{2} \log 2\pi; \\ \int_0^1 x \psi(x) dx &= -\frac{1}{2} \log 2\pi; \\ \int_u^1 x \psi'(x) dx &= \log \Gamma(u) - u \psi(u) - \gamma, \quad u > 0; \\ \int_0^1 x^2 \psi'(x) dx &= \log 2\pi - \gamma. \end{aligned}$$

[§]Voir par exemple N. NIELSEN, Handbuch der Theorie der Gammafunktion.

[¶]On peut retenir cette expression sous la forme $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right)$, où le symbole $\frac{1}{0}$ doit être interprété comme valant $-\gamma$.

Démonstration

La première intégrale est l'intégrale de Raabe^{||}.
Pour la deuxième, on a

$$\int_0^1 x\psi(x)dx = x \log \Gamma(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \log \Gamma(x) dx = -\frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Ensuite,

$$\int_u^1 x\psi'(x)dx = x\psi(x) \Big|_u^1 - \int_u^1 \psi(x)dx = \log \Gamma(u) - u\psi(u) - \gamma.$$

Enfin,

$$\int_0^1 x^2\psi'(x)dx = x^2\psi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2x\psi(x)dx = -\gamma + \log 2\pi. \quad \square$$

Proposition 28

$$\psi(1+z) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

Proposition 29 Pour tout nombre entier naturel N , on a

$$\psi(N+1) = H_N - \gamma,$$

où

$$H_N := \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

Proposition 30

$$\psi(1-z) = \psi(z) + \pi \cot \pi z.$$

Proposition 31 Le développement de Laurent de $(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ en $s = -1$ commence par

$$2\pi(-(s+1)^{-1} + \gamma - 1 + \log 2\pi + \dots)$$

Démonstration

D'une part,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-s} &= 2\pi e^{-(s+1) \log 2\pi} \\ &= 2\pi(1 - (s+1) \log 2\pi + \dots). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)} \\ &= \frac{-1}{1-(s+1)} \cdot \frac{1}{s+1} (\Gamma(1) + (s+1)\Gamma'(1) + \dots) \\ &= -((s+1)^{-1} + 1 + \dots)(1 - \gamma(s+1) + \dots) \\ &= \frac{-1}{s+1} + \gamma - 1 + \dots \end{aligned}$$

Le résultat en découle par multiplication. □

Nous poserons

$$J(z) := J_{1,1}(z, 0) = \int_0^{+\infty} \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{t+z} dt.$$

On peut exprimer la fonction J à l'aide de la fonction Γ .

^{||}N. NIELSEN, loc. cit. §34, formule (17).

Proposition 32 Pour $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on a

$$J(z) = -\log \Gamma(z) + \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi).$$

En particulier, pour tout nombre entier positif N , on a

$$J(N) = -\log N! + \left(N + \frac{1}{2}\right) \log N - N + \frac{1}{2} \log(2\pi).$$

Proposition 33 On a pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$,

$$|J(z)| \leq \frac{1 + \pi\sqrt{2}}{12 \operatorname{dist}(z,]-\infty, 0])}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -x]$, on pose

$$J_{1,2}(z, x) := \int_x^{+\infty} \frac{B_1(t)}{(t+z)^2} dt.$$

Proposition 34 La fonction $z \mapsto J_{1,2}(z, x)$ est analytique pour $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -x]$. On a, pour $x + \Re z > 0$,

$$|J_{1,2}(z, x)| \leq \frac{1}{2(x + \Re z)}.$$

Proposition 35 Pour $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on a

$$J'(z) = -J_{1,2}(z, 0) = -\psi(z) + \log z - \frac{1}{2z}.$$

En particulier, pour tout nombre entier positif N , on a

$$J'(N) = \log N + \gamma + \frac{1}{2N} - H_N,$$

où $H_N := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}$.

4 Sommes de Vassiounine

Soit q un nombre entier positif. Nous avons

$$1 + X + \cdots + X^{q-1} = \frac{1 - X^q}{1 - X}.$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} 1 + 2X + \cdots + (q-1)X^{q-2} &= \frac{-qX^{q-1}(1-X) + 1 - X^q}{(1-X)^2} \\ &= \frac{1 - qX^{q-1} + (q-1)X^q}{(1-X)^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{q-1} nX^n = \frac{X}{(1-X)^2} (1 - qX^{q-1} + (q-1)X^q).$$

Proposition 36 *Soit z une racine q -ème de l'unité. On a*

$$\sum_{n=0}^{q-1} nz^n = \begin{cases} \frac{q(q-1)}{2} & \text{si } z = 1; \\ \frac{q}{z-1} & \text{si } z \neq 1. \end{cases}$$

Démonstration

Si $z = 1$, la somme en question vaut

$$1 + \cdots + (q-1) = \frac{q(q-1)}{2}.$$

Si $z \neq 1$, la formule ci-dessus donne

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{q-1} nz^n &= \frac{z}{(1-z)^2} (1 - qz^{q-1} + q-1) \\ &= \frac{qz(1 - z^{q-1})}{(1-z)^2} \\ &= \frac{q(z-1)}{(1-z)^2} \\ &= \frac{q}{z-1}. \end{aligned} \quad \square$$

Si p et q sont deux nombres entiers premiers entre eux, q étant positif, nous définissons la **somme de Vassiounine**** $V(p, q)$ par la formule

$$\begin{aligned} V(p, q) &:= \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \cot \frac{k\pi}{q} \\ &= \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q-1} (kp \bmod q) \cot \frac{k\pi}{q} \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} \frac{k}{q} \cot \frac{k\bar{p}\pi}{q}, \end{aligned}$$

où $k\bar{p} \equiv 1 \pmod{q}$. Par convention, $V(p, 1) = 0$.

V. I. Vassiounine, *Sur un système biorthogonal relié à l'hypothèse de Riemann* (en russe), Alg. i An. **7 (1995), 118-135; traduction anglaise dans St-Petersburg Math. J. **7** (1996), 405-419.

Proposition 37 La somme de Vassiouline $V(p, q)$ est une fonction impaire et de période q de la variable p :

$$V(p + q, q) = V(p, q); \quad V(-p, q) = -V(p, q).$$

Proposition 38 On a

$$\begin{aligned} V(p, q) &= \sum_{k=1}^{q-1} B_1\left(\frac{kp}{q}\right) \cot \frac{k\pi}{q} \\ &= 2 \sum_{1 \leq k < q/2} B_1\left(\frac{kp}{q}\right) \cot \frac{k\pi}{q} \end{aligned}$$

Démonstration

Comme $\cot(\pi - x) = -\cot x$, on a

$$\begin{aligned} V(p, q) &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \cot \frac{k\pi}{q} \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{(q-k)p}{q} \right\} \cot \frac{(q-k)\pi}{q} \\ &= - \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ -\frac{kp}{q} \right\} \cot \frac{k\pi}{q} \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\{kp/q\} - \{-kp/q\}}{2} \cot \frac{k\pi}{q} \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} B_1\left(\frac{kp}{q}\right) \cot \frac{k\pi}{q}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $1 \leq k \leq q-1$,

$$B_1\left(\frac{kp}{q}\right) \cot \frac{k\pi}{q} = B_1\left(\frac{(q-k)p}{q}\right) \cot \frac{(q-k)\pi}{q},$$

donc la contribution à la dernière somme de l'intervalle $q/2 < k \leq q-1$ est égale à celle de l'intervalle $1 \leq k < q/2$ (celle de $k = q/2$ est nulle). \square

Proposition 39 Pour $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 2$, on a $V(p, q) \ll q \log q$.

Démonstration

Pour $0 < x \leq \pi/2$, on a $\cot x = 1/x + O(1)$, d'où

$$\begin{aligned} V(p, q) &= \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq k < q/2} \frac{B_1(kp/q)}{k} + O(q) \\ &\ll q \log q. \end{aligned} \quad \square$$

On peut exprimer les sommes de Vassiouline au moyen de la dérivée logarithmique de la fonction Γ .

Proposition 40 On a

$$\begin{aligned} V(p, q) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} B_1\left(\frac{kp}{q}\right) \psi\left(\frac{k}{q}\right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \psi\left(\frac{k}{q}\right) - \frac{q}{\pi} (\log q + \gamma). \end{aligned}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
V(p, q) &= \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \cot \frac{k\pi}{q} \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \left(\psi \left(1 - \frac{k}{q} \right) - \psi \left(\frac{k}{q} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \psi \left(\frac{q-k}{q} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \psi \left(\frac{k}{q} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{(q-k)p}{q} \right\} \psi \left(\frac{k}{q} \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \psi \left(\frac{k}{q} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \left(\left\{ \frac{-kp}{q} \right\} - \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \right) \psi \left(\frac{k}{q} \right) \\
&= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} B_1 \left(\frac{kp}{q} \right) \psi \left(\frac{k}{q} \right) \\
&= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \psi \left(\frac{k}{q} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \psi \left(\frac{k}{q} \right) \\
&= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \psi \left(\frac{k}{q} \right) - \frac{q}{\pi} (\log q + \gamma). \quad \square
\end{aligned}$$

On peut considérer les sommes apparaissant dans la proposition 40 en y remplaçant p et q par des nombres entiers positifs a et b non nécessairement premiers entre eux.

Proposition 41 *Soit a et b des nombres entiers positifs, d leur plus grand diviseur commun, $p = a/d$ et $q = b/d$. On a :*

$$\sum_{m=1}^{b-1} B_1 \left(\frac{ma}{b} \right) \psi \left(\frac{m}{b} \right) = -\frac{\pi d}{2} V(p, q),$$

et

$$\sum_{m=1}^{b-1} \left\{ \frac{ma}{b} \right\} \psi \left(\frac{m}{b} \right) = -\frac{\pi d}{2} V(p, q) - \frac{b}{2} (\log b + \gamma) + \frac{d}{2} (\log d + \gamma).$$

Démonstration

Observons que l'on peut remplacer les $\sum_{m=1}^{b-1}$ par des $\sum_{m=1}^b$.

Pour $1 \leq m \leq b = qd$, écrivons

$$m = qk + r; \quad 0 \leq k \leq d-1; \quad 1 \leq r \leq q.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^b B_1\left(\frac{ma}{b}\right) \psi\left(\frac{m}{b}\right) &= \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{r=1}^q B_1\left(\frac{(qk+r)pd}{qd}\right) \psi\left(\frac{qk+r}{qd}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{r=1}^q B_1\left(\frac{rp}{q}\right) \psi\left(\frac{k}{d} + \frac{r}{qd}\right) \\
&= \sum_{r=1}^q B_1\left(\frac{rp}{q}\right) \sum_{k=0}^{d-1} \psi\left(\frac{k}{d} + \frac{r}{qd}\right) \\
&= \sum_{r=1}^q B_1\left(\frac{rp}{q}\right) \left(\psi\left(\frac{r}{q}\right) - \log d\right) d \\
&= d \sum_{r=1}^q B_1\left(\frac{rp}{q}\right) \psi\left(\frac{r}{q}\right) \\
&= -\frac{\pi d}{2} V(p, q).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^b \left\{ \frac{ma}{b} \right\} \psi\left(\frac{m}{b}\right) &= \sum_{m=1}^b B_1\left(\frac{ma}{b}\right) \psi\left(\frac{m}{b}\right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^b \psi\left(\frac{m}{b}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \psi\left(\frac{k}{d}\right) \\
&= -\frac{\pi d}{2} V(p, q) - \frac{b}{2}(\log b + \gamma) + \frac{d}{2}(\log d + \gamma).
\end{aligned}$$

□

Nous évaluons maintenant d'autres sommes trigonométriques au moyen de sommes de Vassioune.

Proposition 42 Soit p et q deux nombres entiers premiers entre eux, q étant positif. On a

$$\sum_{1 \leq k, l \leq q} k l e^{i2\pi k l p / q} = \frac{q^2}{4} (3q + 1 - 2iV(\bar{p}, q)).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq k, l \leq q} k l e^{i2\pi k l p / q} &= \sum_{1 \leq k, l \leq q-1} + \sum_{\substack{1 \leq l \leq q-1 \\ k=q}} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq q-1 \\ l=q}} + q^2 \\
&= \sum_{k=1}^{q-1} k \sum_{l=1}^{q-1} l e^{i2\pi k l p / q} + 2q \sum_{j=1}^{q-1} j + q^2 \\
&= \sum_{k=1}^{q-1} k \frac{q}{e^{i2\pi k p / q} - 1} + 2q \frac{q(q-1)}{2} + q^2 && \text{d'après la proposition 36} \\
&= q \sum_{k=1}^{q-1} \frac{k}{e^{i2\pi k p / q} - 1} + q^3 \\
&= q \sum_{k=1}^{q-1} k \frac{e^{-i\pi k p / q}}{2i \sin \pi k p / q} + q^3 \\
&= q \sum_{k=1}^{q-1} k \left(-\frac{i}{2} \cot \pi \frac{k p}{q} - \frac{1}{2} \right) + q^3 \\
&= -\frac{i}{2} q^2 \sum_{k=1}^{q-1} \frac{k}{q} \cot \pi \frac{k p}{q} - \frac{1}{2} q \frac{q(q-1)}{2} + q^3 \\
&= \frac{3}{4} q^3 + \frac{1}{4} q^2 - \frac{i}{2} q^2 V(\bar{p}, q),
\end{aligned}$$

comme annoncé. □

Proposition 43 Soit p et q deux nombres entiers premiers entre eux, q étant positif. On a

$$\sum_{1 \leq k, l \leq q} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{q} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{q} \right) e^{i2\pi k l p / q} = \frac{1}{4} - \frac{i}{2} V(\bar{p}, q).$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq k, l \leq q} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{q} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{q} \right) e^{i2\pi k l p / q} &= \frac{1}{4} \sum_{1 \leq k, l \leq q} e^{i2\pi k l p / q} - \frac{1}{2q} \sum_{1 \leq k, l \leq q} l e^{i2\pi k l p / q} + \\
&\quad - \frac{1}{2q} \sum_{1 \leq k, l \leq q} k e^{i2\pi k l p / q} + \frac{1}{q^2} \sum_{1 \leq k, l \leq q} k l e^{i2\pi k l p / q}.
\end{aligned}$$

La première somme vaut

$$\frac{1}{4} \sum_{\substack{1 \leq l \leq q \\ k=q}} 1 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{l=1}^q (e^{i2\pi k p / q})^l = \frac{q}{4}.$$

La deuxième, comme la troisième, vaut

$$-\frac{1}{2q} \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq q \\ l=q}} q + \sum_{l=1}^{q-1} l \sum_{k=1}^q (e^{i2\pi l p / q})^k \right) = -\frac{q}{2}.$$

Par conséquent, la proposition 42 nous donne

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq k, l \leq q} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{q}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{q}\right) e^{i2\pi klp/q} &= -\frac{3}{4}q + \frac{1}{q^2} \sum_{1 \leq k, l \leq q} klp e^{i2\pi klp/q} \\ &= -\frac{3}{4}q + \frac{3}{4}q + \frac{1}{4} - \frac{i}{2}V(\bar{p}, q) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{i}{2}V(\bar{p}, q).\end{aligned}$$

□

5 Somme des inverses des termes d'une progression arithmétique

La source de ce paragraphe est l'article de D. H. LEHMER, *Euler constants for arithmetical progressions*, Acta Arith. **27** (1975), 125–142.

Soient q et r des nombres entiers positifs.

Proposition 44 On a pour $x > 0$,

$$\sum_{0 \leq n \leq x} \frac{1}{qn+r} = \frac{\log x}{q} - \frac{1}{q} \psi\left(\frac{r}{q}\right) + \frac{1}{q} \log\left(1 + \frac{r}{qx}\right) + \frac{\frac{1}{2} - \{x\}}{qx+r} + \frac{1}{q} J_{1,2}\left(\frac{r}{q}, x\right).$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq n \leq x} \frac{1}{qn+r} &= \int_{0^-}^x \frac{d[t]}{qt+r} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{qt+r} + \int_{0^-}^x \frac{d\left(\frac{1}{2} - \{t\}\right)}{qt+r} \\ &= \frac{1}{q} \log \frac{qx+r}{r} + \frac{\frac{1}{2} - \{x\}}{qx+r} + \frac{1}{2r} + q \int_0^x \frac{\frac{1}{2} - \{t\}}{(qt+r)^2} dt \\ &= \frac{\log x}{q} + \frac{1}{q} \log \frac{q}{r} + \frac{1}{2r} + q \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{t\}}{(qt+r)^2} dt + \frac{1}{q} \log\left(1 + \frac{r}{qx}\right) + \frac{\frac{1}{2} - \{x\}}{qx+r} - q \int_x^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{t\}}{(qt+r)^2} dt, \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque

$$\frac{1}{q} \log \frac{q}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{q} J'\left(\frac{r}{q}\right) = -\frac{1}{q} \psi\left(\frac{r}{q}\right). \quad \square$$

Proposition 45 On a pour $x > r$,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv r \pmod{q}}} \frac{1}{n} = \frac{\log x}{q} + \gamma(r, q) + R(x, r, q),$$

où

$$\gamma(r, q) := -\frac{1}{q} \left(\psi\left(\frac{r}{q}\right) + \log q \right),$$

et

$$R(x, r, q) := \frac{\frac{1}{2} - \left\{\frac{x-r}{q}\right\}}{x} + \frac{1}{q} J_{1,2}\left(\frac{r}{q}, \frac{x-r}{q}\right).$$

On a $R(x, r, q) \leq 1/x$.

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv r \pmod{q}}} \frac{1}{n} &= \sum_{0 \leq n \leq (x-r)/q} \frac{1}{qn+r} \\ &= \frac{1}{q} \log\left(\frac{x-r}{q}\right) - \frac{1}{q} \psi\left(\frac{r}{q}\right) + \frac{1}{q} \log\left(1 + \frac{r}{x-r}\right) + R(x, r, q) \\ &= \frac{\log x}{q} + \gamma(r, q) + R(x, r, q). \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 46 Soit $g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de période q . On a, pour $x > q$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{g(n)}{n} = S(g) \log x + \gamma(g) + R(x, g),$$

où

$$S(g) := \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q g(r),$$

$$\gamma(g) := \sum_{r=1}^q g(r) \gamma(r, q),$$

et

$$R(x, g) := \sum_{r=1}^q g(r) R(x, r, q).$$

On a $|R(x, g)| \leq x^{-1} \sum_{r=1}^q |g(r)|$.

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{g(n)}{n} &= \sum_{r=1}^q g(r) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv r \pmod{q}}} \frac{g(n)}{n} \\ &= \sum_{r=1}^q g(r) \left(\frac{\log x}{q} + \gamma(r, q) + R(x, r, q) \right) \\ &= S(g) \log x + \gamma(g) + R(x, g). \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 47 Soit $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de période q . La série $\sum_{n \geq 1} g(n)/n$ converge si et seulement si $S(g) = 0$ et on a alors

$$\sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n} = \gamma(g) = \sum_{r=1}^q g(r) \gamma(r, q) = -\frac{1}{q} \sum_{r=1}^q g(r) \psi\left(\frac{r}{q}\right).$$

Démonstration

Cela résulte de la proposition 46. □

Voici une application de cette proposition.

Proposition 48 Soit p et q deux nombres entiers premiers entre eux, q étant positif. La série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{B_1(kp/q)}{k}$$

converge et a pour somme $\frac{\pi}{2q} V(p, q)$.

Démonstration

La fonction $g : k \mapsto B_1(kp/q)$ est périodique, de période q et

$$\begin{aligned} S(g) &= \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q B_1(rp/q) \\ &= \frac{1}{q} B_1(rp) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La série est donc convergente et a pour somme

$$\begin{aligned} \gamma(g) &= -\frac{1}{q} \sum_{r=1}^q g(r) \psi(r/q) \\ &= -\frac{1}{q} \sum_{r=1}^q B_1(rp/q) \psi(r/q) \\ &= \frac{\pi}{2q} V(p, q). \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 49 Soit $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de période q . On a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n(n+1)} = g(0) + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (g(r-1) - g(r)) \psi \left(\frac{r}{q} \right).$$

Démonstration

Comme g est bornée, on a par sommation d'Abel :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n(n+1)} = g(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{h(n)}{n},$$

où $h(n) := g(n) - g(n-1)$. Or h est de période q comme g et, d'une part,

$$S(h) := \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q h(r) = \frac{1}{q} (g(q) - g(0)) = 0,$$

d'autre part,

$$\gamma(h) = \sum_{r=1}^q h(r) \gamma(r, q) = -\frac{1}{q} \sum_{r=1}^q h(r) \psi \left(\frac{r}{q} \right).$$

Le résultat découle donc de la proposition 47. □

6 La fonction d'Estermann

6.1 Définitions et propriétés fondamentales

Soit h et k deux nombres entiers premiers entre eux, k étant positif. La **fonction d'Estermann**^{††} $E(s; h/k)$ est définie pour $\Re s > 1$ par la série de Dirichlet absolument convergente

$$E(s; h/k) := \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) e^{i2\pi nh/k} n^{-s}.$$

Observons que $E(s; h/k) = E(s; h'/k)$ si $h \equiv h' \pmod{k}$.

On a en particulier $E(s; 0/1) = \zeta(s)^2$. Plus généralement, on peut exprimer $E(s; h/k)$ à l'aide de la fonction ζ d'Hurwitz.

Proposition 50

$$E(s; h/k) = k^{-2s} \sum_{1 \leq j, l \leq k} e^{i2\pi jlh/k} \zeta(s, j/k) \zeta(s, l/k).$$

Proposition 51 *La fonction $E(s; h/k)$ se prolonge méromorphiquement au plan complexe, avec un seul pôle, double, en $s = 1$. La partie polaire de $E(s; h/k)$ en $s = 1$ est*

$$k^{-1}(s-1)^{-2} + k^{-1}(2\gamma - 2 \log k)(s-1)^{-1}.$$

Proposition 52 *La fonction $E(s; h/k)$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$E(s; h/k) = 2(2\pi)^{2s-2} \Gamma^2(1-s) k^{1-2s} (E(1-s; \bar{h}/k) - \cos \pi s E(1-s; -\bar{h}/k))$$

où $h\bar{h} \equiv 1 \pmod{k}$ (si $k = 1$, on pose $E(s; \bar{h}/k) = \zeta^2(s)$).

Proposition 53 *On a**

$$E(0; h/k) = \frac{1}{4} - \frac{i}{2} V(\bar{h}, k),$$

où $h\bar{h} \equiv 1 \pmod{k}$ et où $V(\bar{h}, k)$ désigne la somme de Vassiouline

$$V(\bar{h}, k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} \cot \frac{jh\pi}{k}.$$

Démonstration

D'après la proposition 50, on a

$$\begin{aligned} E(0; h/k) &= \sum_{1 \leq j, l \leq k} e^{i2\pi jlh/k} \zeta(0, j/k) \zeta(0, l/k) \\ &= \sum_{1 \leq j, l \leq k} \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{k} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{k} \right) e^{i2\pi jlh/k}, \end{aligned}$$

car $\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a$. La proposition 43 permet de conclure. □

Comme la fonction ζ d'Hurwitz, la fonction d'Estermann est à croissance polynômiale, uniformément dans toute bande verticale. Pour sa fonction de Lindelöf

$$\mu(\sigma) := \limsup_{|\tau| \rightarrow +\infty} \log |E(\sigma + i\tau; h/k)| / \log |\tau|,$$

on a les estimations suivantes

$$\begin{array}{lll} \mu(\sigma) = 0, & \sigma \geq 1 & \text{(série de Dirichlet)} \\ \mu(\sigma) = 1 - 2\sigma, & \sigma \leq 0 & \text{(équation fonctionnelle et formule de Stirling)} \\ \mu(\sigma) \leq 1 - \sigma, & 0 < \sigma < 1 & \text{(convexité)}. \end{array}$$

^{††}M. JUTILA, Lectures on a method in the theory of exponential sums, §1.1

*Cf. theorem 1 dans M. ISHIBASHI, *The value of the Estermann zeta functions at $s = 0$* , Acta Arith. **73** (1995), 357-361.

6.2 Les fonctions Esin et Ecos

Nous définissons une fonction d'Estermann « en cosinus » et une « en sinus ».

$$\begin{aligned} \text{Ecos}(s; h/k) &:= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \cos 2\pi n \frac{h}{k} = \frac{1}{2}E(s; h/k) + \frac{1}{2}E(s; -h/k); \\ \text{Esin}(s; h/k) &:= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \sin 2\pi n \frac{h}{k} = \frac{1}{2i}E(s; h/k) - \frac{1}{2i}E(s; -h/k). \end{aligned}$$

Observons que, pour $k = 1$, $\text{Esin} = 0$ et $\text{Ecos} = \zeta^2$.

Proposition 54 *La fonction Esin est entière. De plus, l'abscisse de convergence de sa série de Dirichlet est inférieure ou égale à $1/2$.*

Démonstration

D'une part, $E(s; h/k)$ et $E(s; -h/k)$ ont même partie polaire en $s = 1$.

D'autre part, le théorème de Schnee-Landau et la valeur $\mu(0) = 1$ pour la fonction de Lindelöf de la fonction d'Estermann fournissent l'assertion sur l'abscisse de convergence. \square

Proposition 55 *La fonction Esin vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\text{Esin}(s; h/k) = 2(2\pi)^{2s-2}\Gamma^2(1-s)k^{1-2s}(1 + \cos \pi s)\text{Esin}(1-s; \bar{h}/k),$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Esin}}(s; h/k) &:= \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) (2\pi/k)^{-s} \text{Esin}(s; h/k), \\ \widetilde{\text{Esin}}(s; h/k) &= \widetilde{\text{Esin}}(1-s; \bar{h}/k). \end{aligned}$$

Démonstration

Posons

$$\chi(s) := 2(2\pi)^{2s-2}\Gamma^2(1-s)k^{1-2s}.$$

D'après la proposition 52, on a

$$E(s; h/k) = \chi(s)(E(1-s; \bar{h}/k) - \cos \pi s E(1-s; -\bar{h}/k)),$$

et

$$E(s; -h/k) = \chi(s)(E(1-s; -\bar{h}/k) - \cos \pi s E(1-s; \bar{h}/k)).$$

Par conséquent,

$$\text{Esin}(s; h/k) = \chi(s)(\widetilde{\text{Esin}}(1-s; \bar{h}/k) - \cos \pi s \widetilde{\text{Esin}}(1-s; -\bar{h}/k)).$$

Mais, la fonction sinus étant impaire, on a $\text{Esin}(s; -h/k) = -\text{Esin}(s; h/k)$, donc

$$\text{Esin}(s; h/k) = \chi(s)(1 + \cos \pi s)\text{Esin}(1-s; \bar{h}/k).$$

Comme

$$\begin{aligned} (1 + \cos \pi s)\chi(s) &= 2 \cos^2 \frac{\pi s}{2} \cdot 2(2\pi)^{2s-2}\Gamma^2(1-s)k^{1-2s} \\ &= \left(2 \cos \frac{\pi s}{2} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\right) \frac{2 \cos \frac{\pi s}{2}}{\sin \frac{\pi s}{2}} \Gamma(1-s)(2\pi)^{2s-2}k^{1-2s} \\ &= \left(\frac{\pi}{\Gamma(s)}\right) \frac{2 \cos \frac{\pi s}{2}}{\sin \frac{\pi s}{2}} \Gamma(1-s)(2\pi)^{2s-2}k^{1-2s} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)}{\sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s)} (2\pi/k)^{2s-1} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi(1-s)}{2} \Gamma(1-s)(2\pi/k)^{s-1}}{\sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s)(2\pi/k)^{-s}}, \end{aligned}$$

on obtient la forme symétrique annoncée. \square

Proposition 56 *On a*

$$\operatorname{Esin}(0; h/k) = \frac{1}{2}V(\bar{h}, k),$$

et

$$\operatorname{Esin}(1; h/k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n} \sin 2\pi n \frac{h}{k} = -\frac{\pi^2}{2k}V(h, k).$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Esin}(0; h/k) &= \frac{1}{2i}E(0; h/k) - \frac{1}{2i}E(0; -h/k) \\ &= \Im E(0; h/k) \\ &= -\frac{1}{2}V(\bar{h}, k). \end{aligned}$$

D'autre part, l'équation fonctionnelle de la fonction Esin donne

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}V(\bar{h}, k) &= \operatorname{Esin}(0; h/k) \\ &= 2(2\pi)^{-2}\Gamma^2(1)k \cdot 2 \operatorname{Esin}(1; \bar{h}/k) \\ &= k\pi^{-2}\operatorname{Esin}(1; \bar{h}/k), \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{Esin}(1; \bar{h}/k) = -\frac{\pi^2}{2k}V(\bar{h}, k). \quad \square$$

Proposition 57 *La fonction Ecos est méromorphe dans \mathbb{C} avec un seul pôle, double, en $s = 1$, où sa partie polaire est*

$$k^{-1}(s-1)^{-2} + k^{-1}(2\gamma - 2\log k)(s-1)^{-1}.$$

Proposition 58 *La fonction Ecos vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\operatorname{Ecos}(s; h/k) = 2(2\pi)^{2s-2}\Gamma^2(1-s)k^{1-2s}(1 - \cos \pi s)\operatorname{Ecos}(1-s; \bar{h}/k),$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} \widetilde{\operatorname{Ecos}}(s; h/k) &:= \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) (2\pi/k)^{-s} \operatorname{Ecos}(s; h/k), \\ \widetilde{\operatorname{Ecos}}(s; h/k) &= \widetilde{\operatorname{Ecos}}(1-s; \bar{h}/k). \end{aligned}$$

Proposition 59

$$\operatorname{Ecos}(0; h/k) = \frac{1}{4}.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Ecos}(0; h/k) &= \frac{E(0; h/k) + E(0; -h/k)}{2} \\ &= \Re E(0; h/k) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad \square$$

6.3 Les fonctions G_0 et G_1

Nous utiliserons les fonctions

$$G_0(s; h/k) := \cos \frac{\pi s}{2} \text{Ecos}(s; h/k) - \sin \frac{\pi s}{2} \text{Esin}(s; h/k)$$

et

$$G_1(s; h/k) := (2\pi)^{-s} \Gamma(s) G_0(s+2; h/k).$$

Si $k = 1$, on a $G_0(s; h) = \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s)^2$ et $G_1(s; h) = -(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s+2)^2$.

Proposition 60 *La fonction G_0 est méromorphe dans \mathbb{C} avec un seul pôle, simple, en $s = 1$, où son développement de Laurent commence par*

$$-\frac{\pi}{2k} ((s-1)^{-1} + 2\gamma - 2 \log k - \pi V(h, k)).$$

Démonstration

Au voisinage de $s = 1$, on a

$$\begin{aligned} G_0(s; h/k) &= \cos \frac{\pi s}{2} \text{Ecos}(s; h/k) - \sin \frac{\pi s}{2} \text{Esin}(s; h/k) \\ &= \left(-\frac{\pi}{2}(s-1) + O((s-1)^3) \right) \left(\frac{1}{k}(s-1)^{-2} + \frac{2\gamma - 2 \log k}{k}(s-1)^{-1} + O(1) \right) + \\ &\quad \left(-1 + O((s-1)^2) \right) \left(-\frac{\pi^2}{2k} V(h, k) + O(s-1) \right) \\ &= -\frac{\pi}{2k} (s-1)^{-1} + \frac{\pi^2 V(h, k) - 2\pi(\gamma - \log k)}{2k} + O(s-1). \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 61 *La fonction G_0 vérifie l'équation fonctionnelle*

$$G_0(s; h/k) = 2(2\pi)^{2s-2} \Gamma^2(1-s) k^{1-2s} \sin \pi s G_0(1-s; \bar{h}/k).$$

Démonstration

Posons

$$\chi(s) := 2(2\pi)^{2s-2} \Gamma^2(1-s) k^{1-2s}.$$

D'après les équations fonctionnelles de Esin et Ecos , on a

$$\begin{aligned} G_0(s; h/k) &= \cos \frac{\pi s}{2} \text{Ecos}(s; h/k) - \sin \frac{\pi s}{2} \text{Esin}(s; h/k) \\ &= \chi(s) \left(\cos \frac{\pi s}{2} (1 - \cos \pi s) \text{Ecos}(1-s; \bar{h}/k) - \sin \frac{\pi s}{2} (1 + \cos \pi s) \text{Esin}(1-s; \bar{h}/k) \right) \\ &= \chi(s) \left(\cos \frac{\pi s}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi s}{2} \text{Ecos}(1-s; \bar{h}/k) - \sin \frac{\pi s}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\pi s}{2} \text{Esin}(1-s; \bar{h}/k) \right) \\ &= \chi(s) \sin \pi s \left(\sin \frac{\pi s}{2} \text{Ecos}(1-s; \bar{h}/k) - \cos \frac{\pi s}{2} \text{Esin}(1-s; \bar{h}/k) \right) \\ &= \chi(s) \sin \pi s \left(\cos \frac{\pi(1-s)}{2} \text{Ecos}(1-s; \bar{h}/k) - \sin \frac{\pi(1-s)}{2} \text{Esin}(1-s; \bar{h}/k) \right) \\ &= \chi(s) \sin \pi s G_0(1-s; \bar{h}/k). \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 62 *On a*

$$G_0(0; h/k) = \frac{1}{4}.$$

Démonstration

$$G_0(0; h/k) = \text{Ecos}(0; h/k) = \frac{1}{4}. \quad \square$$

Proposition 63 La fonction $G_1(s; h/k)$ est méromorphe dans \mathbb{C} avec des pôles en $0, -1, -2, \dots$
La partie polaire en $s = -1$ est

$$\frac{\pi^2}{k} \left(\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1 + \gamma - 2 \log k - \log 2\pi - \pi V(h, k)}{s+1} + \dots \right).$$

Le pôle en $s = -2$ est simple, avec résidu $\pi^2/2$.

Démonstration

D'après les propositions 31 et 60, on a au voisinage de $s = -1$,

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s) = 2\pi \left(\frac{-1}{s+1} + \gamma - 1 + \log 2\pi + \dots \right),$$

et

$$G_0(s+2) = -\frac{\pi}{2k} \left(\frac{1}{s+1} + 2\gamma - 2 \log k - \pi V(h, k) + \dots \right).$$

On trouve alors par multiplication la partie polaire de G_1 en $s = -1$:

$$-\frac{\pi^2}{k} \left(\frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{2 \log k - 2\gamma + \gamma - 1 + \log 2\pi + \pi V(h, k)}{s+1} + \dots \right),$$

d'où le résultat annoncé.

Au voisinage de $s = -2$, on a $\Gamma(s) \sim \frac{1}{2(s+2)}$ et $(2\pi)^2 G_0(0; h/k) = \pi^2$. □

Proposition 64 La fonction $G_1(s; h/k)$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante

$$G_1(s; h/k) = k^{-2s-3} \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} G_1(-s-3; \bar{h}/k).$$

Démonstration

D'après la proposition 61, on a

$$\begin{aligned} G_1(s; h/k) &= (2\pi)^{-s}\Gamma(s)G_0(s+2; h/k) \\ &= (2\pi)^{-s}\Gamma(s)2(2\pi)^{2(s+2)-2}\Gamma^2(1-s-2)k^{1-2(s+2)} \sin \pi(s+2) G_0(1-s-2; \bar{h}/k) \\ &= 2(2\pi)^{s+2}\Gamma(s)\Gamma^2(-1-s) \sin \pi s k^{-2s-3} G_0(-1-s; \bar{h}/k). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma^2(-1-s) \sin \pi s &= \Gamma(s) \frac{\Gamma(1-s)}{s(s+1)} (s+2)(s+3)\Gamma(-3-s) \sin \pi s \\ &= \pi \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} \Gamma(-3-s), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} G_1(s; h/k) &= 2(2\pi)^{s+2} \cdot \pi \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} \Gamma(-3-s) k^{-2s-3} G_0(-1-s; \bar{h}/k) \\ &= k^{-2s-3} \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} (2\pi)^{s+3} \Gamma(-3-s) G_0(-1-s; \bar{h}/k) \\ &= k^{-2s-3} \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} G_1(-s-3; \bar{h}/k). \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 65 Le polynôme généralisé

$$\text{Res}(G_1(s; h/k)t^{-s}, -2) + \text{Res}(G_1(s; h/k)t^{-s}, -1)$$

est

$$\frac{\pi^2}{2} t^2 - \frac{\pi^2}{k} t (\log t + \pi V(h, k) + 2 \log k + \log 2\pi - \gamma - 1).$$

Démonstration

Au voisinage de $s = -1$, on a

$$G_1(s; h/k)t^{-s} = \frac{\pi^2}{k} \left(\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1 + \gamma - 2 \log k - \log 2\pi - \pi V(h, k)}{s+1} + O(1) \right) \cdot t \left(1 - (s+1) \log t + O((s+1)^2) \right),$$

d'où

$$\text{Res}(G_1(s; h/k)t^{-s}, -1) = \frac{\pi^2}{k} t (-\log t + 1 + \gamma - 2 \log k - \log 2\pi - \pi V(h, k)). \quad \square$$

Proposition 66 *La fonction $G_1(s; h/k)$ est à croissance polynômiale, uniformément dans toute bande verticale.*

Démonstration

C'est en effet le cas pour les fonctions $\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$, $\Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}$, Ecos et Esin . □

Remarque

Si l'on avait défini G_0 par la formule

$$\cos \frac{\pi s}{2} \text{Ecos}(s; h/k) + \sin \frac{\pi s}{2} \text{Esin}(s; h/k),$$

les résultats ci-dessus seraient les mêmes, sauf à changer $V(h, k)$ en son opposé.

7 Les fonctions φ_n

7.1 Définition de φ_n pour $n \geq 2$

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2, et x un nombre réel positif. On pose

$$\varphi_n(x) := \sum_{k \geq 1} \frac{B_n(kx)}{k^n}.$$

Proposition 67 *La fonction φ_n est périodique, de période 1. Elle est de classe C^{n-2} et, pour $n \geq 3$, on a $\varphi'_n = n\varphi_{n-1}$.*

Proposition 68 *Pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\varphi_n(x) \leq M_n \zeta(n) \leq 6n!(2\pi)^{-n}.$$

Proposition 69 *Pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x)$.*

Proposition 70 *Pour $n \geq 2$, la série de Fourier de φ_n est*

$$-n! \sum_{m \neq 0} \frac{\tau(|m|)}{(i2\pi m)^n} e^{i2\pi m x},$$

où $\tau(|m|)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de $|m|$.

7.2 La fonction φ_1

Commençons par une interversion formelle de sommations :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \frac{B_1(kx)}{k} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sum_{l \geq 1} \frac{\sin 2\pi l k x}{l} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1, l \geq 1} \frac{\sin 2\pi l k x}{lk} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m} \sin 2\pi m x. \end{aligned}$$

Les propositions 48 et 56 montrent que cette manipulation est justifiée quand x est un nombre rationnel p/q , où p et q sont entiers, premiers entre eux, et q positif : les deux séries convergent alors et ont la même somme $\frac{\pi}{2q} V(p, q)$.

Proposition 71 *Les séries*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{B_1(kx)}{k} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\pi} \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m} \sin 2\pi m x$$

convergent presque partout et dans $L^2(0, 1)$ vers une même fonction.

Démonstration

L'assertion sur $L^2(0, 1)$ résulte de l'égalité

$$\sum_{k=1}^K \frac{B_1(kx)}{k} = -\frac{1}{\pi} \sum_{m \geq 1} m^{-1} \left(\sum_{\substack{d|m \\ d \leq K}} 1 \right) \sin 2\pi m x,$$

et de la convergence de la série

$$\sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)^2}{m^2}.$$

L'assertion « presque partout » est due à Chowla et Walfisz[†].

[†]Cf. Hilfssatz 14 dans S. CHOWLA, A. WALFISZ, *Über eine Riemannsche Identität*, Acta Arith. **1** (1936), 87-112.

□

Nous noterons

$$\varphi_1(x) := \sum_{k \geq 1} \frac{B_1(kx)}{k}$$

en tout point de convergence de cette série[‡]. La fonction φ_1 est définie presque partout, et appartient à $L^2(0, 1)$. Sa série de Fourier est

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m} \sin 2\pi m x. \quad (2)$$

7.3 Majoration du module de continuité de φ_2

Proposition 72 *On a*

$$\varphi_2(x) = \int_0^x 2\varphi_1(t) dt + \frac{\pi^2}{36}.$$

En particulier, φ_2 est presque partout dérivable et $\varphi_2' = 2\varphi_1$ presque partout.

Afin de majorer le module de continuité de φ_2 , donnons une majoration des sommes partielles de la série de Fourier de φ_1 [§]

Proposition 73 *Pour $x \in \mathbb{R}$ et $K \geq 2$, on a*

$$\sum_{1 \leq k \leq K} \frac{\tau(k)}{k} \sin kx \ll \log K.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq K} \frac{\tau(k)}{k} \sin kx &= \sum_{ab \leq K} \frac{\sin abx}{ab} \\ &= \sum_{1 \leq a \leq K} \frac{1}{a} \sum_{b \leq K/a} \frac{\sin bax}{b}. \end{aligned}$$

La somme intérieure est bornée (proposition 14), donc le résultat découle de l'estimation

$$\sum_{1 \leq a \leq K} \frac{1}{a} \ll \log K. \quad \square$$

□

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est uniformément continue, son module de continuité est la fonction de δ définie par

$$\omega(\delta; f) := \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

On a $\omega(\delta; f) = o(1)$ quand δ tend vers 0.

Proposition 74 *Pour $0 < \delta \leq 1/2$, on a $\omega(\delta; \varphi_2) \ll \delta \log 1/\delta$.*

[‡]L'ensemble de ces points de convergence est précisément connu ; il coïncide d'ailleurs avec l'ensemble des points de convergence de la série de Fourier (2). Cf. J. R. WILTON, *An approximate functional equation with application to a problem of diophantine approximation*, J. reine angew. Math. **169** (1933), 219-237, et R. DE LA BRETÈCHE ET G. TENENBAUM, *Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques*, à paraître au Journal d'analyse mathématique.

[§]Cf. formule (25_{V1}) dans A. WALFISZ, *Über einige trigonometrische Summen*, Math. Z. **33** (1931), 564-601.

Démonstration

On peut supposer δ suffisamment petit.
Si $|x - y| \leq \delta$ et $K \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) - \varphi_2(y) &= 2 \int_x^y \varphi_1(t) dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_x^y \sum_{k \leq K} \frac{\tau(k)}{k} \sin 2\pi kt \, dt - \frac{2}{\pi} \int_x^y \sum_{k > K} \frac{\tau(k)}{k} \sin 2\pi kt \, dt.\end{aligned}$$

La première intégrale est $\ll \delta \log K$, d'après la proposition 73. L'inégalité de Schwarz montre que le carré de la deuxième intégrale est

$$\begin{aligned}&\ll \delta \int_0^1 \left(\sum_{k > K} \frac{\tau(k)}{k} \sin 2\pi kt \, dt \right)^2 \\ &\ll \delta \sum_{k > K} \frac{\tau(k)^2}{k^2},\end{aligned}$$

d'après l'égalité de Parseval.

Comme

$$\sum_{k > K} \frac{\tau(k)^2}{k^2} \ll \frac{\log^3 K}{K},$$

on obtient

$$\varphi_2(x) - \varphi_2(y) \ll \delta \log K + \delta^{1/2} K^{-1/2} \log^{3/2} K.$$

En choisissant

$$K = \frac{1}{\delta} \log \frac{1}{\delta},$$

on aboutit au résultat annoncé. □

7.4 Transformée de Mellin de $\varphi_2(p/q + t) - \varphi_2(p/q)$

Soit p et q deux nombres entiers premiers entre eux, q étant positif. La fonction

$$t \mapsto \Delta_{p,q}(t) := \varphi_2\left(\frac{p}{q} + t\right) - \varphi_2\left(\frac{p}{q}\right)$$

appartient à $\mathcal{W}(-1, 0)$ en tant que fonction continue, bornée, et $O(t \log 1/t)$ au voisinage de 0 (proposition 74). Si $q = 1$, $\Delta_{p,q}(t) = \varphi_2(t) - \varphi_2(0)$. Dans ce cas, la fonction $\Delta_{\bar{p},q}(t)$, qui joue un rôle ci-dessous, vaut par convention la même chose. Notons aussi que notre définition de $\Delta_{p,q}(t)$ vaut pour tout nombre réel t , mais que, dans ce paragraphe, nous ne considérons que les valeurs positives de t .

Proposition 75 *Pour $-1 < \Re s < 0$, on a*

$$M\Delta_{p,q}(s) = -\frac{1}{\pi^2} G_1(s; p/q).$$

Démonstration

On a

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m^2} \cos 2\pi mt,$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta_{p,q}(t) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m^2} \cos 2\pi m \left(\frac{p}{q} + t\right) - \frac{1}{\pi^2} \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m^2} \cos 2\pi m \frac{p}{q} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m^2} \cos 2\pi m \frac{p}{q} \cdot (\cos 2\pi mt - 1) - \frac{1}{\pi^2} \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m^2} \sin 2\pi m \frac{p}{q} \cdot \sin 2\pi mt.\end{aligned}$$

Comme $t \mapsto \cos t - 1$ et $t \mapsto \sin t$ appartiennent à $\mathcal{W}(-1, 0)$, et comme

$$\sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m^2} (2\pi m)^{-\sigma} < +\infty$$

pour tout $\sigma \in]-1, 0[$, la proposition 8 confirme que $\Delta_{p,q} \in \mathcal{W}(-1, 0)$ et prouve que, pour $-1 < \Re s < 0$,

$$\begin{aligned} M\Delta_{p,q}(s) &= \frac{1}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m^2} \cos 2\pi m \frac{p}{q} \cdot (2\pi m)^{-s} - \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(m)}{m^2} \sin 2\pi m \frac{p}{q} \cdot (2\pi m)^{-s} \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \Gamma(s) (2\pi)^{-s} \left(\cos \frac{\pi s}{2} \text{Ecos}(s+2; p/q) - \sin \frac{\pi s}{2} \text{Esin}(s+2; p/q) \right) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \Gamma(s) (2\pi)^{-s} G_0(s+2; p/q) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} G_1(s; p/q). \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 76 Soit p et q deux nombres entiers premiers entre eux, $q \geq 2$. La fonction

$$f : t \mapsto (qt)^3 \Delta_{\bar{p},q}(1/q^2 t) - 2q^3 \int_0^t u(3u-t) \Delta_{\bar{p},q}(1/q^2 u) du$$

appartient à $\mathcal{W}(-3, -2)$ et vérifie

$$Mf(s) = -\frac{1}{\pi^2} G_1(s; p/q), \quad -3 < \sigma < -2.$$

Démonstration

Nous allons appliquer systématiquement les règles de calcul de transformées de Mellin vues au chapitre 1.

- La fonction

$$f_1 : t \mapsto \Delta_{\bar{p},q}(t)$$

appartient à $\mathcal{W}(-1, 0)$ et vérifie

$$Mf_1(s) = -\frac{1}{\pi^2} G_1(s; \bar{p}/q), \quad -1 < \sigma < 0.$$

- La fonction

$$f_2 : t \mapsto \Delta_{\bar{p},q}(1/t)$$

appartient à $\mathcal{W}(0, 1)$ et vérifie

$$\begin{aligned} Mf_2(s) &= Mf_1(-s) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} G_1(-s; \bar{p}/q), \quad 0 < \sigma < 1. \end{aligned}$$

- La fonction

$$f_3 : t \mapsto t^3 \Delta_{\bar{p},q}(1/t)$$

appartient à $\mathcal{W}(-3, -2)$ et vérifie

$$\begin{aligned} Mf_3(s) &= Mf_2(s+3) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} G_1(-s-3; \bar{p}/q), \quad -3 < \sigma < -2. \end{aligned}$$

- La fonction

$$f_4 : t \mapsto q^{-3} f_3(q^2 t) = q^3 t^3 \Delta_{\bar{p}, q}(1/q^2 t)$$

appartient à $\mathcal{W}(-3, -2)$ et vérifie

$$\begin{aligned} Mf_4(s) &= q^{-2s-3} Mf_3(s) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} q^{-2s-3} G_1(-s-3; \bar{p}/q), \quad -3 < \sigma < -2. \end{aligned}$$

- La fonction

$$\begin{aligned} f_5 : t \mapsto f_4(t) - 6 \int_0^t f_4(u) u^{-1} du + 2t \int_0^t f_4(u) u^{-2} du \\ = q^3 \left(t^3 \Delta_{\bar{p}, q}(1/q^2 t) - 6 \int_0^t u^2 \Delta_{\bar{p}, q}(1/q^2 u) du + 2t \int_0^t u \Delta_{\bar{p}, q}(1/q^2 u) du \right) \end{aligned}$$

appartient à $\mathcal{W}(-3, -2)$ et vérifie

$$\begin{aligned} Mf_5(s) &= \left(1 + \frac{6}{s} - \frac{2}{s+1} \right) Mf_4(s) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} q^{-2s-3} \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} G_1(-s-3; \bar{p}/q) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} G_1(s; p/q), \quad -3 < \sigma < -2, \end{aligned}$$

d'après la proposition 64. □

7.5 Comportement de φ_2 au voisinage d'un nombre rationnel

Les propositions 10, 65, 66, 75, 76 montrent que $\Delta_{p, q}$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante.

Proposition 77 *Pour $t > 0$ et p, q , deux nombres entiers premiers entre eux, $q > 0$, on a*

$$\Delta_{p, q}(t) = \frac{t \log t}{q} + \frac{t}{q} (\pi V(p, q) + 2 \log q + \log 2\pi - \gamma - 1) - \frac{t^2}{2} + (qt)^3 \Delta_{\bar{p}, q}(1/q^2 t) - 2q^3 \int_0^t u(3u-t) \Delta_{\bar{p}, q}(1/q^2 u) du.$$

Pour la fonction $\Delta_{p, q}(-t)$, $t > 0$, des calculs analogues mènent à l'équation fonctionnelle

$$\Delta_{p, q}(-t) = \frac{t \log t}{q} + \frac{t}{q} (-\pi V(p, q) + 2 \log q + \log 2\pi - \gamma - 1) - \frac{t^2}{2} + (qt)^3 \Delta_{\bar{p}, q}(-1/q^2 t) - 2q^3 \int_0^t u(3u-t) \Delta_{\bar{p}, q}(-1/q^2 u) du.$$

On en déduit notamment le comportement asymptotique de φ_2 au voisinage d'un nombre rationnel quelconque.

Proposition 78 *On a, uniformément pour $t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$,*

$$\varphi_2 \left(\frac{p}{q} + t \right) - \varphi_2 \left(\frac{p}{q} \right) = \frac{1}{q} |t| \log |t| + \frac{t}{q} \pi V(p, q) + \frac{|t|}{q} (2 \log q + \log 2\pi - \gamma - 1) t - \frac{t^2}{2} + O((qt)^3).$$

Observons que le terme

$$\frac{t}{q} \pi V(p, q) = 2\varphi_1 \left(\frac{p}{q} \right) t$$

correspond à la dérivation terme à terme de la série de Fourier de φ_2 .

8 L'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(0, +\infty; t^{-2}dt)$

8.1 Dilatations dans \mathcal{H}

Considérons l'espace de Hilbert suivant :

$$\mathcal{H} := L^2(0, +\infty; t^{-2}dt).$$

Rappelons[¶] que la transformation de Mellin-Plancherel définit un opérateur unitaire entre \mathcal{H} et $L^2(-1/2 + \mathbb{R}i; d\tau/2\pi)$.

Pour tout nombre réel positif λ , on définit la dilatation $K_\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ par

$$K_\lambda f(x) = \lambda^{-1/2} f(\lambda x), \quad 0 < x < +\infty.$$

Proposition 79 *L'application*

$$\begin{aligned}]0, +\infty[\times \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ (\lambda, f) &\mapsto K_\lambda f \end{aligned}$$

est continue.

Proposition 80 *Les K_λ forment un groupe d'opérateurs unitaires de \mathcal{H} :*

$$K_\lambda K_\mu = K_{\lambda\mu}; \quad K_{1/\lambda} = K_\lambda^{-1} = K_\lambda^*.$$

Proposition 81 *Pour $f \in \mathcal{H}$ et $\lambda > 0$, on a :*

$$MK_\lambda f(s) = \lambda^{-1/2-s} Mf(s).$$

8.2 Fonctions d'autocorrélation

Soit φ un élément de \mathcal{H} . Pour $\lambda > 0$, on pose

$$\begin{aligned} A_\varphi(\lambda) &:= \int_0^{+\infty} \varphi(t) \overline{\varphi(\lambda t)} t^{-2} dt \\ &= \sqrt{\lambda} \langle \varphi, K_\lambda \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Proposition 82 *L'application*

$$\begin{aligned}]0, +\infty[\times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, \varphi) &\mapsto A_\varphi(\lambda) \end{aligned}$$

est continue.

Observons que $|A_\varphi(\lambda)| \leq \|\varphi\|^2 \sqrt{\lambda}$, donc A_φ se prolonge par continuité en $\lambda = 0$ en posant $A_\varphi(0) = 0$.

Proposition 83 *Pour $\lambda > 0$ et $\varphi \in \mathcal{H}$,*

$$A_\varphi(\lambda) = \overline{\lambda A_\varphi(1/\lambda)}.$$

Démonstration

Cela résulte du changement de variable $u = \lambda t$. □

Proposition 84 *Si $\varphi \in \mathcal{W}(a, b)$, où $a < -1/2 < b$, alors $A_\varphi \in \mathcal{W}(\max(a, -b-1), \min(b, -a-1))$, et*

$$MA_\varphi(s) = M\varphi(-s-1)(M\varphi)^*(s).$$

[¶]Cf. §1.2.

Démonstration

Posons pour $t > 0$,

$$f(t) = t^{-1}\varphi(t) \quad \text{et} \quad g(t) = \overline{\varphi(1/t)},$$

de sorte que $A_\varphi(\lambda) = f * g(1/\lambda)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{W}(a+1, b+1) & \text{et} & \quad Mf(s) = M\varphi(s-1); \\ g &\in \mathcal{W}(-b, -a) & \text{et} & \quad Mg(s) = (M\varphi)^*(-s). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f * g \in \mathcal{W}(\max(a+1, -b), \min(b+1, -a)) \quad \text{et} \quad Mf * g(s) = M\varphi(s-1)(M\varphi)^*(-s),$$

d'où le résultat. □

9 L'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »

9.1 Définition et premières propriétés de la fonction $A(\lambda)$

La fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » est définie pour $\lambda \geq 0$ par l'intégrale

$$A(\lambda) := \int_0^{+\infty} \{t\}\{\lambda t\} \frac{dt}{t^2}.$$

Observons pour commencer que $A(0) = 0$ et $A(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda > 0$.

La fonction « partie fractionnaire » appartient à l'espace de Hilbert \mathcal{H} , et A n'est autre que sa fonction d'autocorrélation, au sens du §8.2. On a donc le résultat suivant.

Proposition 85 $A(\lambda)$ est une fonction continue de λ pour $\lambda \geq 0$, et

$$A(\lambda) = \lambda A(1/\lambda), \quad \lambda > 0.$$

D'autre part, la fonction « partie fractionnaire » appartient à $\mathcal{W}(-1, 0)$ et^{||}

$$\int_0^{+\infty} \{t\}t^{s-1} dt = \frac{\zeta(-s)}{s}, \quad -1 < \Re s < 0.$$

La proposition 84 mène donc au résultat suivant.

Proposition 86 La fonction A appartient à $\mathcal{W}(-1, 0)$ et

$$MA(s) = -\frac{\zeta(-s)\zeta(s+1)}{s(s+1)}.$$

9.2 Première relation entre A et φ_1

Proposition 87 $A(1) = \log 2\pi - \gamma$.

Démonstration

$$\begin{aligned} A(1) &= \int_0^{+\infty} \{t\}^2 t^{-2} dt \\ &= \int_0^1 t^2 \sum_{n \geq 0} (n+t)^{-2} dt \\ &= \int_0^1 t^2 \psi'(t) dt \\ &= \log 2\pi - \gamma. \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 88 Soit λ un nombre réel positif tel que la série $\varphi_1(\lambda) = \sum_{k \geq 1} B_1(k\lambda)/k$ converge. Alors il en est de même pour $\varphi_1(1/\lambda)$ et

$$A(\lambda) = \frac{1-\lambda}{2} \log \lambda + \frac{\lambda+1}{2} (\log 2\pi - \gamma) - \varphi_1(\lambda) - \lambda \varphi_1(1/\lambda).$$

Démonstration

En faisant tendre x vers l'infini dans la proposition 22, on obtient :

$$\varphi_1(\lambda) + \lambda \varphi_1(1/\lambda) = \frac{\lambda}{2} A(1) + \frac{1}{2} A(1) - A(\lambda) + \frac{\lambda-1}{2} \log \frac{1}{\lambda},$$

d'où le résultat. □

En particulier, la fonction $\lambda \mapsto \varphi_1(\lambda) + \lambda \varphi_1(1/\lambda)$ se prolonge en une fonction continue sur $]0, +\infty[$. En choisissant λ rationnel, on obtient le résultat suivant.

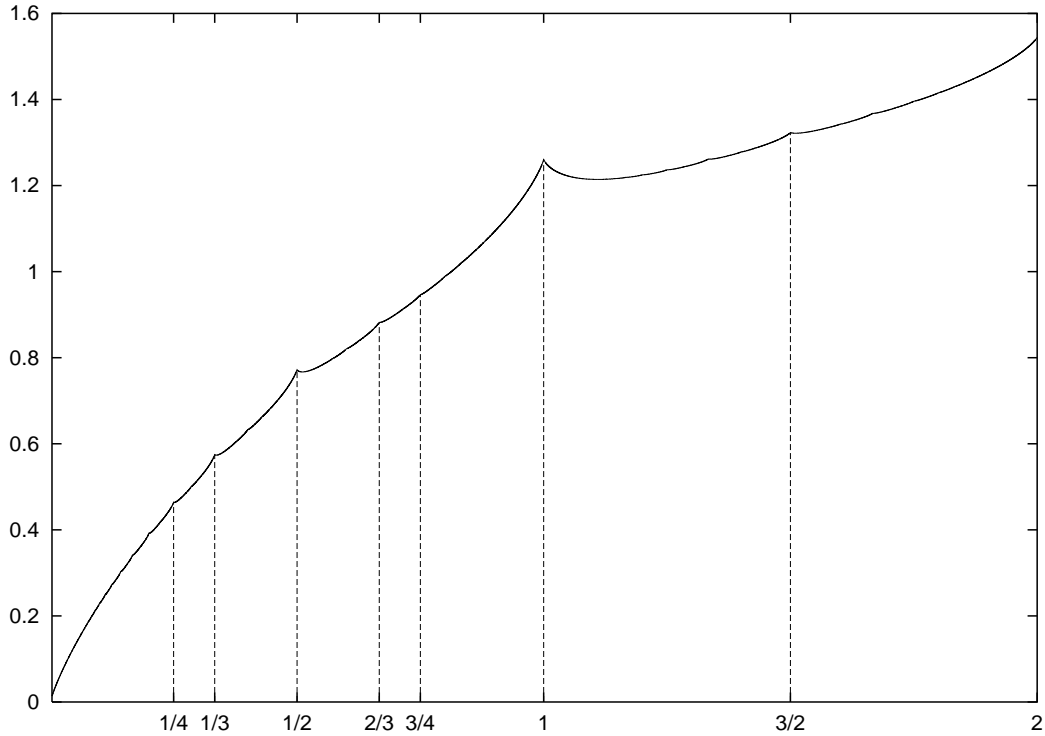
^{||}E. C. TITCHMARSH, The theory of the Riemann zeta function, formule (2.1.5).

Proposition 89 Soit p et q deux nombres entiers positifs premiers entre eux et $\lambda = p/q$. On a

$$A(\lambda) = \frac{1-\lambda}{2} \log \lambda + \frac{\lambda+1}{2} (\log 2\pi - \gamma) - \frac{\pi}{2q} (V(p, q) + V(q, p)).$$

9.3 Représentation graphique de la fonction $A(\lambda)$

En calculant $A(\lambda)$ grâce à la proposition 89 quand λ décrit la suite de Farey d'ordre 287, on obtient la représentation graphique suivante.



9.4 Deuxième relation entre A et φ_1

Proposition 90 On a pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{2} \log \lambda + \frac{1-\gamma + \log 2\pi}{2} - \lambda \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_1(t) \frac{dt}{t^2} \\ &= \frac{1}{2} \log \lambda + \frac{1-\gamma + \log 2\pi}{2} + \frac{\varphi_2(\lambda)}{2\lambda} - \lambda \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^3}. \end{aligned}$$

Démonstration

D'abord, une intégration par parties donne bien

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_1(t) \frac{dt}{t^2} = -\frac{\varphi_2(\lambda)}{2\lambda^2} + \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^3}.$$

D'autre part, pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$-\frac{\varphi_2(\lambda)}{2\lambda^2} + \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^3} = -\frac{\varphi_2(\lambda) - c}{2\lambda^2} + \int_{\lambda}^{+\infty} (\varphi_2(t) - c) \frac{dt}{t^3}.$$

Choisissons $c = \varphi_2(0)$, de sorte que $\varphi_2(t) - c = \Delta_{0,1}(t)$. D'après la proposition 75, on sait que $\Delta_{0,1} \in \mathcal{W}(-1, 0)$ et que

$$M\Delta_{0,1}(s) = -\frac{1}{\pi^2}G_1(s; 0).$$

Par conséquent, la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\Delta_{0,1}(t)}{2t} - t \int_t^{+\infty} \Delta_{0,1}(u)u^{-3}du$$

appartient à $\mathcal{W}(0, 1)$ et vérifie

$$\begin{aligned} Mf(s) &= \frac{1}{2}M\Delta_{0,1}(s-1) - \frac{M\Delta_{0,1}(s-1)}{s+1} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \frac{s-1}{s+1} G_1(s-1; 0). \end{aligned}$$

Vérifions que cette dernière fonction n'est autre que

$$-\frac{\zeta(-s)\zeta(s+1)}{s(s+1)}.$$

On a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi^2} \frac{s-1}{s+1} G_1(s-1; 0) &= -\frac{1}{s+1} \frac{s-1}{2\pi^2} \left(-(2\pi)^{1-s} \Gamma(s-1) \cos \frac{\pi(s-1)}{2} \zeta(s+1)^2 \right) \\ &= -\frac{\zeta(s+1)}{s(s+1)} \cdot \Gamma(s+1) 2(2\pi)^{-1-s} \sin \frac{\pi(-s)}{2} \zeta(1+s) \\ &= -\frac{\zeta(-s)\zeta(s+1)}{s(s+1)}, \end{aligned}$$

d'après l'équation fonctionnelle de la fonction ζ sous la forme

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2} \zeta(1-s).$$

Il résulte alors des propositions 10 et 86 que

$$f(\lambda) = A(\lambda) + \text{Res} \left(-\frac{\zeta(-s)\zeta(s+1)}{s(s+1)} \lambda^{-s}, 0 \right),$$

d'abord pour presque tout $\lambda > 0$, mais en fait pour tout $\lambda > 0$ par continuité de f et A .

Au voisinage de 0, on a les développements suivants :

$$\begin{aligned} \zeta(-s) &= -\frac{1}{2} + \frac{\log 2\pi}{2}s + O(s^2); \\ \frac{1}{1+s} &= 1 - s + O(s^2); \\ \lambda^{-s} &= 1 - s \log \lambda + O(s^2); \\ \zeta(1+s) &= \frac{1}{s} + \gamma + O(s), \end{aligned}$$

donc le coefficient constant de $\lambda^{-s}\zeta(-s)\zeta(s+1)/(s+1)$ en $s = 0$ est

$$-\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \log \lambda + \frac{1}{2} + \frac{\log 2\pi}{2},$$

d'où le résultat. □

Proposition 91 Soit $\lambda > 0$ tel que la série $\varphi_1(\lambda)$ converge. Alors,

$$\varphi_1(\lambda) + \lambda\varphi_1(1/\lambda) - \lambda \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_1(t) \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2}\lambda \log \lambda + \frac{\log 2\pi - \gamma}{2}\lambda - \frac{1}{2},$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\lambda + u) - \varphi_2(\lambda)}{(\lambda + u)^3} du = \frac{1}{2} \log \lambda - \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} + \frac{1}{2\lambda} + \varphi_1(1/\lambda) + \varphi_1(\lambda)/\lambda.$$

Démonstration

Pour la première relation, on compare les propositions 88 et 90 :

$$\frac{1-\lambda}{2} \log \lambda + \frac{\lambda+1}{2} (\log 2\pi - \gamma) - \varphi_1(\lambda) - \lambda\varphi_1(1/\lambda) = \frac{1}{2} \log \lambda + \frac{1-\gamma + \log 2\pi}{2} - \lambda \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_1(t) \frac{dt}{t^2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\lambda + u) - \varphi_2(\lambda)}{(\lambda + u)^3} du &= -\frac{\varphi_2(\lambda)}{2\lambda^2} + \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_2(u) \frac{du}{u^3} \\ &= \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_1(u) \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{2} \log \lambda - \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} + \frac{1}{2\lambda} + \varphi_1(1/\lambda) + \varphi_1(\lambda)/\lambda. \end{aligned} \quad \square$$

9.5 Développement asymptotique de $A(\lambda)$ au voisinage d'un nombre rationnel

Dans ce paragraphe, on considère deux nombres entiers p et q positifs et premiers entre eux. Rappelons la notation

$$\Delta_{p,q}(t) := \varphi_2\left(\frac{p}{q} + t\right) - \varphi_2\left(\frac{p}{q}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 92 Pour $t > -p/q$, on a

$$\begin{aligned} A\left(\frac{p}{q} + t\right) - A\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{1}{2} \log(1 + tq/p) - t \left(\frac{1}{2} \log \frac{p}{q} - \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} + \frac{q}{2p} + \frac{\pi}{2p} (V(p, q) + V(q, p)) \right) + \\ &\quad \frac{\Delta_{p,q}(t)}{2\left(\frac{p}{q} + t\right)} + \left(\frac{p}{q} + t\right) \int_0^t \Delta_{p,q}(u) \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} du. \end{aligned}$$

Démonstration

D'après la proposition 90, on a

$$A\left(\frac{p}{q} + t\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{p}{q} + t\right) + \frac{1-\gamma + \log 2\pi}{2} + \frac{\Delta_{p,q}(t)}{2\left(\frac{p}{q} + t\right)} - \left(\frac{p}{q} + t\right) \int_t^{+\infty} \Delta_{p,q}(u) \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} du.$$

En particulier,

$$A\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{2} \log \frac{p}{q} + \frac{1-\gamma + \log 2\pi}{2} - \frac{p}{q} \int_0^{+\infty} \Delta_{p,q}(u) \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} du,$$

d'où, par soustraction,

$$A\left(\frac{p}{q} + t\right) - A\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{2} \log(1 + tq/p) + \frac{\Delta_{p,q}(t)}{2\left(\frac{p}{q} + t\right)} + \left(\frac{p}{q} + t\right) \int_0^t \Delta_{p,q}(u) \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} du - t \int_0^{+\infty} \Delta_{p,q}(u) \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} du,$$

d'où le résultat, puisque, d'après la proposition 91, on a

$$\int_0^{+\infty} \Delta_{p,q}(u) \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} du = \frac{1}{2} \log \frac{p}{q} - \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} + \frac{q}{2p} + \frac{\pi}{2p} (V(p, q) + V(q, p)). \quad \square$$

Proposition 93 Pour $0 < |u| \leq 1/2q$, on a

$$\begin{aligned}\Delta_{p,q}(u) &= q^{-1}(|u| \log |u| + C^\pm(p, q)u - qu^2/2 + O(q^4u^3)) \\ &= q^{-1}(|u| \log |u| + C^\pm(p, q)u + O(q^3u^2)),\end{aligned}$$

où \pm est le signe de u et

$$C^\pm(p, q) := \pi V(p, q) \pm (2 \log q + \log 2\pi - \gamma - 1) \ll q \log 2q.$$

Démonstration

D'après la proposition 78, on a

$$\Delta_{p,q}(u) = \frac{1}{q}|u| \log |u| + \frac{u}{q}C^\pm(p, q) - \frac{u^2}{2} + O(q^3u^3),$$

d'où la première approximation. D'autre part, q^3u^3 et u^2 sont $O(q^2u^2)$, ce qui donne la deuxième. Enfin, $V(p, q) \ll q \log 2q$ (proposition 39), donc $C^\pm(p, q)$ vérifie la même estimation. \square

Proposition 94 Pour $0 < |t| \leq 1/2q$, on a

$$\left(\frac{p}{q} + t\right)^{-1} \Delta_{p,q}(t) = p^{-1} \left(|t| \log |t| + C^\pm(p, q)t \mp qp^{-1}t^2 \log |t| - (qp^{-1}C^\pm(p, q) + q/2)t^2 \pm q^2p^{-2}t^3 \log |t| + O(q^4t^3) \right).$$

où \pm est le signe de t .

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{q} + t\right)^{-1} \Delta_{p,q}(t) &= p^{-1}(1 + qt/p)^{-1} (|t| \log |t| + C^\pm(p, q)t - qt^2/2 + O(q^4t^3)) \\ &= p^{-1}(1 - qt/p + q^2p^{-2}t^2 + O(q^3p^{-3}t^3)) (|t| \log |t| + C^\pm(p, q)t - qt^2/2 + O(q^4t^3)).\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}(1 - qt/p + q^2p^{-2}t^2 + O(q^3p^{-3}t^3))O(q^4t^3) &\ll q^4t^3; \\ (-qt/p + q^2p^{-2}t^2 + O(q^3p^{-3}t^3)) \cdot (-qt^2/2) &\ll qp^{-1}t \cdot qt^2 \\ &\ll q^4t^3; \\ (q^2p^{-2}t^2 + O(q^3p^{-3}t^3)) \cdot C^\pm(p, q)t &\ll q^2p^{-2}t^2 \cdot q(\log 2q)t \\ &\ll q^4t^3; \\ O(q^3p^{-3}t^3) \cdot |t| \log |t| &\ll q^3p^{-3}t^3 \cdot q^{-1} \log 2q \\ &\ll q^4t^3.\end{aligned}$$

Dans le développement du produit, il y a donc dix termes dont la contribution totale est $\ll q^4t^3$, et six termes restants qui sont :

$$|t| \log |t| \mp qp^{-1}t^2 \log |t| \pm q^2p^{-2}t^3 \log |t| + C^\pm(p, q)t - qp^{-1}C^\pm(p, q)t^2 - qt^2/2,$$

d'où le résultat. \square

Proposition 95 Pour $0 < |u| \leq 1/2q$, on a

$$\left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} \Delta_{p,q}(u) = q^2p^{-3}(|u| \log |u| + C^\pm(p, q)u \mp 3qp^{-1}u^2 \log |u| + O(q^3u^2)).$$

où \pm est le signe de u .

Démonstration

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} \Delta_{p,q}(u) &= q^3 p^{-3} (1 + qu/p)^{-3} \Delta_{p,q}(u) \\ &= q^2 p^{-3} (1 - 3qu/p + O(q^2 p^{-2} u^2)) (|u| \log |u| + C^\pm(p, q)u + O(q^3 u^2)), \end{aligned}$$

d'après la proposition 93.

On a

$$1 - 3qu/p + O(q^2 p^{-2} u^2) \ll 1,$$

donc

$$(1 - 3qu/p + O(q^2 p^{-2} u^2)) O(q^3 u^2) \ll q^3 u^2.$$

D'autre part,

$$-3qu/p + O(q^2 p^{-2} u^2) \ll qp^{-1}u,$$

donc

$$\begin{aligned} (-3qu/p + O(q^2 p^{-2} u^2)) C^\pm(p, q)u &\ll q^2 \log 2q \cdot p^{-1}u^2 \\ &\ll q^3 u^2. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} O(q^2 p^{-2} u^2) |u| \log |u| &\ll q^2 p^{-2} u^3 \log |u| \\ &= p^{-2} q^{-1} |u| \log |u| \cdot q^3 u^2 \\ &\ll p^{-2} q^{-2} \log 2q \cdot q^3 u^2 \\ &\ll q^3 u^2. \end{aligned}$$

Dans le développement du produit, il y a donc six termes dont la contribution totale est $\ll q^3 u^2$, et trois termes restants qui sont :

$$|u| \log |u| + C^\pm(p, q)u \mp 3qp^{-1}u^2 \log |u|. \quad \square$$

Proposition 96 *Pour $0 < |t| \leq 1/2q$, on a*

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} \Delta_{p,q}(u) du &= \frac{1}{2} q^2 p^{-3} (\pm t^2 \log |t| + (C^\pm(p, q) \mp 1/2) t^2 \mp 2qp^{-1} t^3 \log |t| + O(q^3 t^3)) \\ &= q^2 p^{-3} \left(\pm \frac{t^2}{2} \log |t| + O(q^2 t^2) \right). \end{aligned}$$

où \pm est le signe de t .

Démonstration

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^t |u| \log |u| du = \pm \left(\frac{t^2}{2} \log |t| - \frac{t^2}{4} \right); \quad \int_0^t u^2 \log |u| du = \frac{t^3}{3} \log |t| - \frac{t^3}{9}.$$

Par conséquent, d'après la proposition 95,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} \Delta_{p,q}(u) du &= q^2 p^{-3} \left(\pm \frac{t^2}{2} \log |t| \mp \frac{t^2}{4} + C^\pm(p, q) \frac{t^2}{2} \mp 3qp^{-1} \left(\frac{t^3}{3} \log |t| - \frac{t^3}{9} \right) + O(q^3 t^3) \right) \\ &= \frac{1}{2} q^2 p^{-3} (\pm t^2 \log |t| + (C^\pm(p, q) \mp 1/2) t^2 \mp 2qp^{-1} t^3 \log |t| + O(q^3 t^3)). \end{aligned}$$

Pour la deuxième estimation, on observe que

$$\begin{aligned}
(C^\pm(p, q) \mp 1/2)t^2 &\ll q(\log 2q)t^2 \\
&\ll q^2t^2; \\
qp^{-1}t^3 \log |t| &= qp^{-1} \cdot t \log |t| \cdot t^2 \\
&\ll qp^{-1}q^{-1}(\log 2q)t^2 \\
&\ll q^2t^2,
\end{aligned}$$

et $q^3t^3 \ll q^2t^2$. □

Proposition 97 *Pour $0 < |t| \leq 1/2q$, on a*

$$\left(\frac{p}{q} + t\right) \int_0^t \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} \Delta_{p,q}(u) du = \frac{1}{2}qp^{-2} (\pm t^2 \log |t| + (C^\pm(p, q) \mp 1/2)t^2 \mp qp^{-1}t^3 \log |t| + O(q^3t^3)).$$

où \pm est le signe de t .

Démonstration

D'après la proposition 96, on a

$$\frac{p}{q} \int_0^t \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} \Delta_{p,q}(u) du = \frac{1}{2}qp^{-2} (\pm t^2 \log |t| + (C^\pm(p, q) \mp 1/2)t^2 \mp 2qp^{-1}t^3 \log |t| + O(q^3t^3)),$$

et

$$t \int_0^t \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} \Delta_{p,q}(u) du = q^2p^{-3} \left(\pm \frac{t^3}{2} \log |t| + O(q^2t^3)\right),$$

d'où

$$\left(\frac{p}{q} + t\right) \int_0^t \left(\frac{p}{q} + u\right)^{-3} \Delta_{p,q}(u) du = \frac{1}{2}qp^{-2} (\pm t^2 \log |t| + (C^\pm(p, q) \mp 1/2)t^2 \mp (2qp^{-1} - qp^{-1})t^3 \log |t| + O(q^3t^3)).$$

□

Proposition 98 *Pour $0 < |t| \leq 1/2q$, on a*

$$A\left(\frac{p}{q} + t\right) - A\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{|t| \log |t|}{2p} + D^\pm(p, q)t - \frac{q(p+q \pm 1)}{4p^2}t^2 + O(q^4p^{-1}t^3),$$

où

$$D^\pm(p, q) := -\frac{1}{2} \log \frac{p}{q} + \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} \pm \frac{\log q}{p} \pm \frac{\log 2\pi - \gamma - 1}{2p} - \frac{\pi}{2p}V(q, p).$$

et \pm est le signe de t .

Démonstration

D'après les propositions 92, 94 et 97, on a

$$\begin{aligned}
A\left(\frac{p}{q} + t\right) - A\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{1}{2}qp^{-1}t - \frac{1}{4}q^2p^{-2}t^2 + O(q^3p^{-3}t^3) + \\
&\quad - t \left(\frac{1}{2} \log \frac{p}{q} - \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} + \frac{q}{2p} + \frac{\pi}{2p}(V(p, q) + V(q, p))\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}p^{-1} \left(|t| \log |t| + C^\pm(p, q)t \mp qp^{-1}t^2 \log |t| - (qp^{-1}C^\pm(p, q) + q/2)t^2 \pm q^2p^{-2}t^3 \log |t| + O(q^4t^3)\right) + \\
&\quad \frac{1}{2}qp^{-2} (\pm t^2 \log |t| + (C^\pm(p, q) \mp 1/2)t^2 \mp qp^{-1}t^3 \log |t| + O(q^3t^3)).
\end{aligned}$$

Le coefficient de $|t| \log |t|$ est $1/2p$; ceux de $t^2 \log |t|$ et $t^3 \log |t|$ sont nuls. Le coefficient de t est :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}qp^{-1} - \left(\frac{1}{2} \log \frac{p}{q} - \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} + \frac{q}{2p} + \frac{\pi}{2p} (V(p, q) + V(q, p)) \right) + \frac{1}{2}p^{-1}C^\pm(p, q) \\ &= -\frac{1}{2} \log \frac{p}{q} + \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} \pm \frac{\log q}{p} \pm \frac{\log 2\pi - \gamma - 1}{2p} - \frac{\pi}{2p}V(q, p). \end{aligned}$$

Le coefficient de t^2 est

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}q^2p^{-2} - \frac{1}{2}p^{-1}(qp^{-1}C^\pm(p, q) + q/2) + \frac{1}{2}qp^{-2}(C^\pm(p, q) \mp 1/2) \\ &= -\frac{1}{4}qp^{-2}(p + q \pm 1). \end{aligned}$$

Enfin, le terme complémentaire est $O(q^4p^{-1}t^3)$. □