

# Dynamique quantique dans le cas d'un spectre fractal

Ariane SORET

Encadré par Eric AKKERMANN & Evgeni GUREVICH  
ENS Cachan - Technion Institute of Technology

27 August 2014

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
  - Mesure appropriée
  - Fonction de corrélation
  - Rapport de participation (participation ratio)
- 5 Perspectives
  - Pistes pour prolonger l'étude du participation ratio
  - Emission spontanée - Superradiance - Rayonnement du corps noir

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques**
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques**
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques**
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques**
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques**
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives

## Origine du terme

"Fractal" : introduit par Mandelbrot pour définir les objets tellement irréguliers qu'ils sortent du cadre de la géométrie classique

## Définition d'une fractale par Mandelbrot (1986)

*Une fractale est une forme composée de parties similaires au tout d'une façon ou d'une autre*

Ici : objet avec invariance d'échelle.

## Exemple

Triangle de Sierpinski

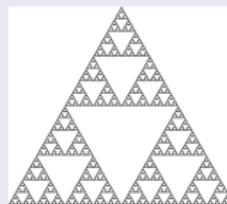


Figure:

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci**
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives

## Cavité de Fibonacci

potentiel variant spatialement ->  
 modification de la densité d'états  
 des modes propres du système.  
 Cavité longitudinale dont la largeur  
 varie selon ordre de Fibonacci ->  
 spectre fractal (type Cantor).

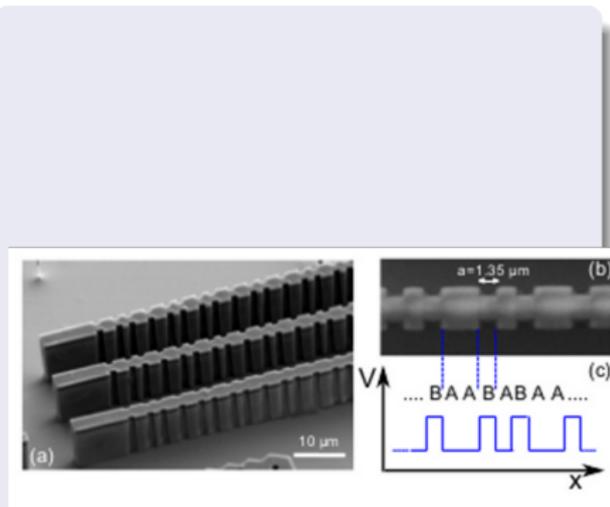


Figure: Fibonacci cavity. Source : [1]

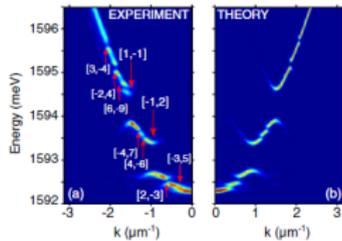


Figure: Cavité 144 lettres. Source :

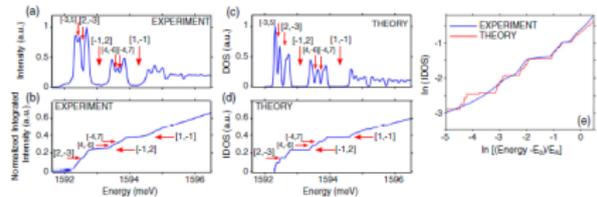


Figure: Cavité 144 lettres. (a) Emission en champ lointain. (b) Résultats numérique avec potentiel effectif; gaps en  $[p, q]$  indiqués par flèches rouges. (c) Mesure de l'intensité totale émise (intégrale angulaire)  $I(\epsilon')$ . (d) Intégrale spectrale de l'intensité  $\int_{E_0}^{\epsilon} I(\epsilon') d\epsilon'$  ( $E_0$  énergie minimale). (e) DOS lissé calculé pour comparaison avec (c). (f) Calcul de IDOS normalisé. Source : [1]

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
  - Mesure appropriée

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
  - Mesure appropriée
  - Fonction de corrélation

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
  - Mesure appropriée
  - Fonction de corrélation
  - Rapport de participation (participation ratio)
- 5 Perspectives

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
  - Mesure appropriée
  - Fonction de corrélation
  - Rapport de participation (participation ratio)
- 5 Perspectives

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
  - Mesure appropriée
  - Fonction de corrélation
  - Rapport de participation (participation ratio)
- 5 Perspectives

Position du problème : Hamiltonien  $H$ , spectre = ensemble de Cantor triadique

### Problématiques - Objectifs

- Dynamique du paquet d'onde ?
- Quelles quantités physiques mettent en évidence la structure fractale du spectre ?
- Expression analytique ?
- Inversement : quelles quantités donnent informations sur le spectre ?

### Ensemble de Cantor triadique

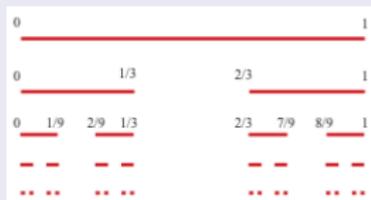


Figure: Ensemble de Cantor triadique

Ensemble de Cantor  $K$  : de mesure (Lebesgue) nulle. Densité d'états dégénérée. Définition d'une mesure appropriée :

$$\int_K f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{P_n} \int_{a_j}^{a_j+3^{-n}} f(x) dx$$

avec  $P_n = \{a_j\}$  ensemble des extrémités gauches des segments restant à l'étape  $n$  de la construction du Cantor. Vérifie :

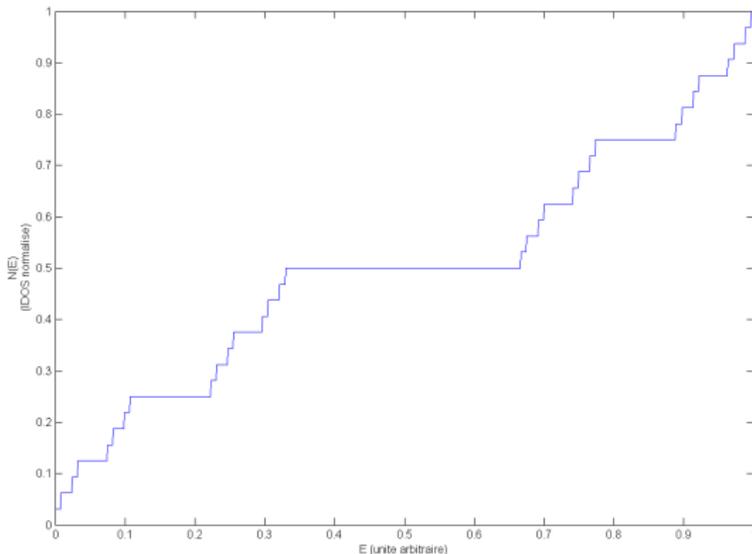
- $\int_K d\mu(x) = 1$  par construction
- $\int_K f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x}{3}\right) d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x+2}{3}\right) d\mu(x)$

*Remarque : on peut abusivement voir  $d\mu$  comme  $d\mu(\epsilon) \equiv \rho(\epsilon) d\epsilon$*

## Densité d'états intégrée (IDOS) :

$$N(\epsilon) = \int_{\text{spectre}} \theta(\epsilon - \epsilon') d\mu(\epsilon') = \frac{1}{2} \int_{\text{spectre}} \theta\left(\epsilon - \frac{\epsilon'}{3}\right) d\mu(\epsilon') + \frac{1}{2} \int_{\text{spectre}} \theta\left(\epsilon - \frac{\epsilon' + 2}{3}\right) d\mu(\epsilon')$$

$$N(\epsilon) = \frac{1}{2} N(3\epsilon) + g(\epsilon)$$



## Fonction de corrélation

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t | \langle \psi(0) | \psi(t') \rangle |^2 dt'$$

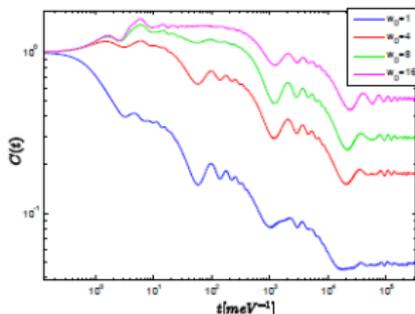


Figure: Fonction de corrélation du paquet d'onde pour la cavité de Fibonacci. Source : [1]

Pour la cavité de Fibonacci : oscillations log-périodiques.

Même comportement quand le spectre est un ensemble de Cantor ?

Pour toute fractale ?

Décomposition sur une base orthonormale  $\{|\phi(\epsilon)\rangle\}$  des vecteurs propres de  $H$  :

$$|\psi(t)\rangle = \int_K g(\epsilon) e^{-i\epsilon t} |\phi(\epsilon)\rangle d\mu(\epsilon)$$

Puis :

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi(0) | \psi(t') \rangle|^2 dt' \\ &= \iint_{C \times C} \text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t) d\mu(\epsilon) d\mu(\epsilon') \end{aligned}$$

*Remarque* :  $t$  et  $\epsilon$  sont variables conjuguées ; la structure fractale, contenue dans le spectre en énergie, devrait donc se refléter dans la forme de  $C(t)$ .

$$C(t) = \iint_{K \times K} \text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t) d\mu(\epsilon) d\mu(\epsilon')$$

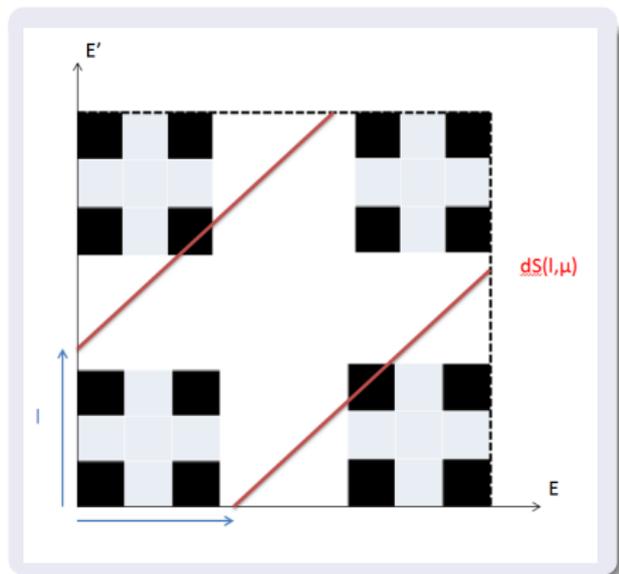
Changement de variable :

$$l = |\epsilon' - \epsilon|$$

$dS(l, \mu)$  = aire au sens de  $\mu$  du tapis de Cantor contenu dans les bandes rouges

La fonction de corrélation devient

$$C(t) = \int_0^1 \text{sinc}(lt) dS(l, \mu)$$



Calcul de  $dS(l)$  avec transformation de Mellin. Finalement :

Fonction de corrélation quand le spectre est un ensemble de Cantor

$$C(t) = \frac{1}{\ln(3)} \sum_n \epsilon_n t^{-\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(d_n - 1)\right) \Gamma(d_n - 1)$$

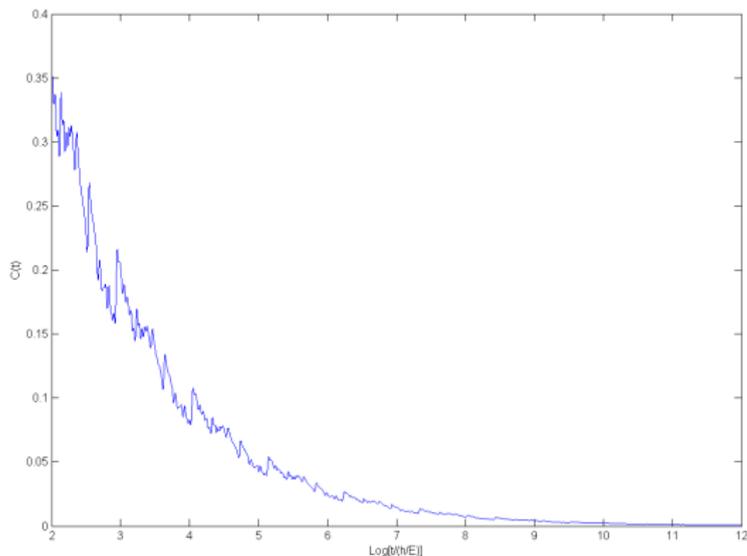
$$C(t) = \left(\frac{E}{e.u.}\right)^2 \left(\frac{Et}{\hbar}\right)^{-d} \sum_n \frac{\epsilon_n}{\ln(3)} \left(\frac{Et}{\hbar}\right)^{-\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(d_n - 1)\right) \Gamma(d_n - 1)$$

$$d_n = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} + \frac{2i\pi n}{\ln(3)}$$

*Remarque* : résultat similaire pour tous les cas où le spectre est une fractale auto-similaire, ie avec propriété d'échelle.

Comportement asymptotique :

$$|\epsilon_n \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)\right) \Gamma\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)| = O\left(\frac{1}{n^{5/2-d}}\right)$$



**Figure:** Fonction de corrélation  $C(t)$  pour un ensemble de Cantor plongé dans  $[0, E]$ , échelle log

## Participation ratio

$$P_r(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dt'}{|\langle x | \psi(t') \rangle|^4}$$

De même : oscillations log-périodiques pour cavité de Fibonacci ;  
retrouve-t-on cela pour un spectre de Cantor ?

Idée : relier  $|\psi(x, t)|$  à la densité d'états grâce aux fonctions de Green.

$$\begin{aligned}
 |\psi(x, t)| &= | \langle x | \psi(t) \rangle | \\
 &= \left| \langle x | e^{-iHt} | \psi(0) \rangle \right| \\
 &= \left| \int_{\text{espace}} \langle x | e^{-iHt} | x' \rangle \psi(x', 0) dx' \right| \\
 &= \left| \int_{\text{espace}} \int_{\text{spectre}} e^{-i\epsilon t} \phi(x, \epsilon)^* \phi(x', \epsilon) \psi(x', 0) dx' d\mu(\epsilon) \right|
 \end{aligned}$$

Que dire de  $\phi(x, \epsilon)^* \phi(x', \epsilon) d\mu(\epsilon)$  ?

Problème ouvert.

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives
  - Pistes pour prolonger l'étude du participation ratio

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Prérequis mathématiques
- 3 Exemple expérimental : cavité de Fibonacci
- 4 Etude analytique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor
- 5 Perspectives
  - Pistes pour prolonger l'étude du participation ratio
  - Emission spontanée - Superradiance - Rayonnement du corps noir

Pistes pour prolonger l'étude du participation ratio :

- 1 Supposer  $\overline{\phi(0, \epsilon) * \phi(x, \epsilon)} = f\left(\frac{x}{l_n}\right)$  ?
- 2 Trouver une relation de dispersion et utiliser la théorie de Fourier
- 3 Montrer que  $\int_{band} \phi(x, \epsilon) * \phi(x', \epsilon) d\mu(\epsilon) < a \|x - x'\|^{-b}$

*Remarques* (1) est raisonnable pour le cas des fonctions propres du Laplacien ; une étude numérique sur un système de forme (fractal ?) telle que le spectre du Laplacien soit fractal est en cours.

(2) Lié au problème de définition et de convergence des séries de Fourier sur des fractales.

(3) Etabli pour les problème de diffusion sur une fractale<sup>a</sup>

a. E. Akkermans, O. Benichou, G. V. Dunne, A. Teplyaev, and Raphael Voituriez, Physical Review E 86, 061125 (2012)

On pourrait appliquer les mêmes méthodes de calcul pour :

- l'émission spontanée d'un système discret couplé avec un spectre fractal
- la superradiance d'un système de deux atomes couplés avec un continuum fractal
- continuer les travaux sur la thermodynamique et diffusion sur des structures fractales
- étudier la statistiques des photons pour le rayonnement thermique de structures fractales.