

### Problème 1 : Matrices de projection

Ce problème propose d'étudier de façon plus approfondie les résultats observés à l'exercice 7.2 du polycopié.

1. Si  $F, G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ , on définit l'ensemble  $F + G$  par

$$F + G = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \exists \vec{y} \in F, \vec{z} \in G \text{ tels que } \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}\}$$

- (a) Montrer que  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Montrer que  $F + G$  contient  $F$ , on admet qu'il contient également  $G$ .
- (c) **(Difficile)** Montrer que si  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ , alors  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ .  
*Indication : considérer une base  $\mathcal{B}_F$  de  $F$  et une base  $\mathcal{B}_G$  de  $G$  et montrer que  $(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$  est une base de  $F + G$ .*

2. On dit qu'une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice de projection si elle vérifie  $P^2 = P$ .

Les questions a) à d) sont indépendantes.

- (a) Montrer que si  $P$  est une matrice de projection inversible alors  $P = I_n$ .
- (b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $P$ . Montrer que  $\lambda \in \{0, 1\}$ .
- (c) Montrer que si  $P$  est une matrice de projection, alors pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} - P\vec{x} \in \text{Ker}(P)$ .
- (d) Montrer que  $\text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P) = \{\vec{0}\}$ .

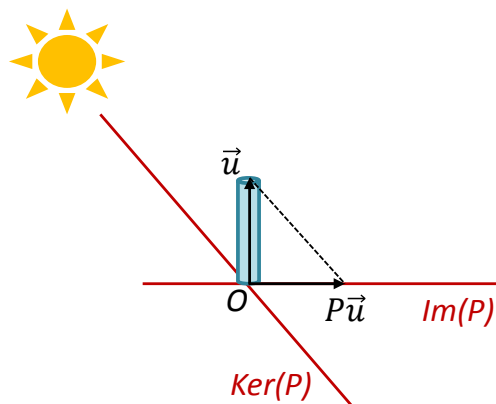
3. Soit  $P$  une matrice de projection. Montrer que  $\text{Ker}(P) + \text{Im}(P) = \mathbb{R}^n$ .

On pourra utiliser, au choix, le résultat démontré à la question 1.c) ou celui de la question 2.c).

4. On considère désormais la matrice  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- (a) Montrer que  $P$  est une matrice de projection.
- (b) Déterminer une base et la dimension de  $\text{Ker}(P)$  et  $\text{Im}(P)$ .
- (c) Soit  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer deux vecteurs  $\vec{y} \in \text{Ker}(P), \vec{z} \in \text{Im}(P)$  tels que  $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ .

Le nom « matrice de projection » vient de la géométrie. En effet, le vecteur  $P\vec{x}$  donne la projection du vecteur  $\vec{x}$  sur le sous-espace  $\text{Im}(P)$  parallèlement au sous-espace  $\text{Ker}(P)$  (voir schéma ci-dessous). De telles matrices sont utilisées par exemple en imagerie de synthèse, pour le calcul de l'ombre portée d'un objet sur le sol.



Corrigé

1. (a) — On peut écrire  $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$  avec  $\vec{0} \in F, \vec{0} \in G$  donc  $\vec{0} \in F + G$ .  
 — Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in F + G, \lambda \in \mathbb{R}$ , montrons que  $\vec{u} + \lambda\vec{v} \in F + G$ . Par hypothèse, il existe  $\vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F$ , et  $\vec{u}_2, \vec{v}_2 \in G$  tels que  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ . Alors  $\vec{u} + \lambda\vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \lambda\vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \lambda\vec{v}_2)$ . Or  $\vec{u}_1 + \lambda\vec{v}_1 \in F$  et  $\vec{u}_2 + \lambda\vec{v}_2 \in G$  puisque  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $\vec{u} + \lambda\vec{v}$  s'écrit bien comme la somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ , donc  $\vec{u} + \lambda\vec{v} \in F + G$ .

Tous les axiomes étant vérifiés,  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

- (b) Soit  $\vec{x} \in F$ . On peut écrire  $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$  avec  $\vec{x} \in F, \vec{0} \in G$  donc  $\vec{x} \in F + G$ . Cela prouve que  $F + G$  contient  $F$ .  
 (c) On note  $k = \dim(F), m = \dim(G)$ . Soient  $\mathcal{B}_F = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$  base de  $F, \mathcal{B}_G = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$  base de  $G$ . Comme  $F$  et  $G$  sont contenus dans  $F + G$  d'après la question précédente,  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$  est une famille de vecteurs de  $F + G$ . Montrons que c'en est une base, montrons donc qu'elle est libre et génératrice de  $F + G$ .

— Libre : soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{u}_i + \sum_{j=1}^m \mu_j \vec{v}_j = \vec{0}$ , montrons que  $\lambda_1 = \dots =$

$\lambda_k = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$ . On a  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{u}_i = -\sum_{j=1}^m \mu_j \vec{v}_j$ . Or le terme de gauche est dans  $F$  et celui de

droite est dans  $G$ , donc comme ils sont égaux, ils appartiennent tous deux à  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ , ce qui signifie

que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{u}_i = \sum_{j=1}^m \mu_j \vec{v}_j = \vec{0}$ . Maintenant, comme  $\mathcal{B}_F$  est une base de  $F$ , c'est une famille libre, on a

donc  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ . De même, comme  $\mathcal{B}_G$  est une base de  $G$ , c'est une famille libre, on a donc  $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$ . La famille  $\mathcal{B}$  est donc libre.

— Montrons que c'est une famille génératrice de  $F + G$ . Soit  $\vec{x} \in F + G$ , il existe  $\vec{y} \in F, \vec{z} \in G$  tels que  $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ . Comme  $\mathcal{B}_F$  est une famille génératrice de  $F$ , il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{y} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{u}_i$ . De

même, comme  $\mathcal{B}_G$  est une famille génératrice de  $G$ , il existe  $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{z} = \sum_{j=1}^m \mu_j \vec{v}_j$ . Alors

$\vec{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{u}_i + \sum_{j=1}^m \mu_j \vec{v}_j$  est bien combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{B}$ , la famille  $\mathcal{B}$  est donc génératrice de  $F + G$ .

La dimension de  $F + G$  est donc égale au nombre de vecteurs de  $\mathcal{B}$  qui vaut  $k + m$ , autrement dit  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ .

2. (a) On a bien  $I_n^2 = I_n$  donc  $I_n$  est une matrice de projection.  
 (b) Soit  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de projection différente de  $I_n$ . On suppose par l'absurde qu'elle est inversible. Alors, comme  $P^2 = P$ , on a aussi  $P^{-1}P^2 = P^{-1}P$  soit  $P = I_n$ , contradiction. Donc  $P$  n'est pas inversible.  
 (c) Soit  $\lambda$  valeur propre de  $P$ , soit  $\vec{x}$  vecteur propre non nul associé, ainsi  $P\vec{x} = \lambda\vec{x}$ . Mais on a aussi  $P\vec{x} = P^2\vec{x} = \lambda^2\vec{x}$ . Donc  $\lambda\vec{x} = \lambda^2\vec{x}$ , ce qui implique  $\lambda = \lambda^2$  (puisque  $\vec{x}$  est non nul), et ceci n'est possible que si  $\lambda \in \{0, 1\}$ .  
 (d) Soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . On calcule  $P(\vec{x} - P\vec{x}) = P\vec{x} - P^2\vec{x} = P\vec{x} - P\vec{x} = \vec{0}$ , donc  $\vec{x} - P\vec{x} \in \text{Ker}(P)$ .  
 (e) Soit  $\vec{y} \in \text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P)$ . Comme  $\vec{y} \in \text{Im}(P)$ , il existe  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\vec{y} = P\vec{x}$ . Comme  $\vec{y} \in \text{Ker}(P)$ , on a aussi  $P\vec{y} = \vec{0}$ . Mais alors  $\vec{0} = P\vec{y} = P(P\vec{x}) = P^2\vec{x} = P\vec{x} = \vec{y}$ . Donc  $\vec{y} = \vec{0}$  ce qui prouve que  $\text{Ker}(P) \cap \text{Im}(P) = \{\vec{0}\}$ .

3. Première méthode : D'après 1.c) et 2.d),  $\dim(\text{Ker}(P) + \text{Im}(P)) = \dim(\text{Ker}(P)) + \dim(\text{Im}(P))$  et cette dernière quantité vaut  $n = \dim(\mathbb{R}^n)$  d'après le théorème du rang.  $\text{Ker}(P) + \text{Im}(P)$  et  $\mathbb{R}^n$  sont donc de même dimension, et comme  $\text{Ker}(P) + \text{Im}(P) \subset \mathbb{R}^n$ , cette inclusion est en fait une égalité :  $\text{Ker}(P) + \text{Im}(P) = \mathbb{R}^n$ .

Deuxième méthode : On sait que  $\text{Ker}(P) + \text{Im}(P) \subset \mathbb{R}^n$ , montrons l'autre inclusion. Soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . On peut écrire  $\vec{x} = (\vec{x} - P\vec{x}) + P\vec{x}$ . Or  $P\vec{x} \in \text{Im}(P)$ , et d'après la question 2.c),  $\vec{x} - P\vec{x} \in \text{Ker}(P)$ . On a donc bien  $\vec{x} \in \text{Ker}(P) + \text{Im}(P)$ . L'autre inclusion est vérifiée et  $\text{Ker}(P) + \text{Im}(P) = \mathbb{R}^n$ .

4. (a) En calculant  $P^2$ , on vérifie bien que  $P^2 = P$  et donc que  $P$  est une matrice de projection.

(b) Calculons une réduite de Gauss de  $P$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

La réduite obtenue possède deux pivots;  $\text{Im}(P)$  est donc de dimension 2, et les deux premières colonnes de  $P$  forment une base de  $\text{Im}(P)$ ;  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  est donc une base de  $\text{Im}(P)$ . Par ailleurs, la réduite de Gauss

obtenue donne que le système linéaire  $P\vec{x} = \vec{0}$  est équivalent à  $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ , ou encore à  $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$ .

Ainsi  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(P)$  si et seulement si  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La famille  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  forme donc une base de  $\text{Ker}(P)$ .

(c) D'après la question 2.d,  $\vec{x} - P\vec{x} \in \text{Ker}(P)$ . Ainsi, si on pose  $\vec{y} = \vec{x} - P\vec{x}$ ,  $\vec{z} = P\vec{x}$ , on a bien  $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$  avec  $\vec{y} \in \text{Ker}(P)$ ,  $\vec{z} \in \text{Im}(P)$ .

On obtient donc en calculant  $\vec{z} = P\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{y} = \vec{x} - \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**Problème 2 : Autour de la matrice hessienne**

Soient  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$ , et  $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ .

On suppose que  $M_0$  est un point critique de  $f$ , c'est-à-dire que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .

On pose  $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ ,  $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ ,  $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ , et on appelle matrice hessienne de  $f$  en  $M_0$  la matrice

$$D^2 f_{M_0} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

On discutera dans ce problème du résultat suivant :

**Théorème.**

- Si  $rt - s^2 > 0$ , alors  $f$  a un extremum local en  $M_0$ .
- Si  $rt - s^2 < 0$  alors  $f$  n'a pas d'extremum local en  $M_0$  (on parle de point-col).

On rappelle que  $f$  a un extremum local en  $M_0$  si, pour  $(h, k)$  au voisinage de  $(0, 0)$ , la quantité  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$  est de signe constant. On rappelle également que, d'après la formule du développement limité à l'ordre 2 au voisinage de  $M_0$ , on a pour  $(h, k)$  proche de  $(0, 0)$ ,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2)$$

1. Deux résultats préliminaires :

- (a) Montrer que si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est une matrice diagonalisable, alors son déterminant est égal au produit de ses valeurs propres.
- (b) Montrer que si  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  non nul, alors  ${}^t \vec{x} \vec{x}$  est un réel strictement positif.

2. On pose  $\vec{u} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$  et  $H = D^2 f_{M_0}$ . Calculer  ${}^t \vec{u} H \vec{u}$  et comparer avec la formule du développement limité.

3. Justifier que la matrice  $H$  est diagonalisable. On notera  $\lambda, \mu$  ses valeurs propres, que l'on suppose non nulles et distinctes ( $\lambda \neq \mu$ ).

4. Il existe donc une base  $(\vec{v}, \vec{w})$  de  $\mathbb{R}^2$  où  $\vec{v}, \vec{w}$  sont vecteurs propres de  $H$ , respectivement pour les valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$ . Donner deux expressions différentes du produit  ${}^t (H\vec{v})\vec{w}$  et en déduire que  ${}^t \vec{v}\vec{w} = 0$ .

5. Justifier qu'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ . Exprimer  ${}^t \vec{u} H \vec{u}$  en fonction de  $\alpha, \beta, \lambda$  et  $\mu$ .

6. Expliquer alors le théorème.

7. Dans le cas où  $\lambda = \mu$ , justifier que  $H = \lambda I_2$ . Montrer alors que si on pose  $\vec{v} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , la famille  $(\vec{v}, \vec{w})$  forme toujours une base de  $\mathbb{R}^2$  formée de vecteurs propres de  $H$  et qu'on a encore  ${}^t \vec{v}\vec{w} = 0$ . Le raisonnement précédent est donc encore valable dans le cas où  $\lambda = \mu$ .

Corrigé

1. (a) Si  $A$  est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  (où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les valeurs propres de  $A$ ) et une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .  
Alors  $\det(A) = \det(P) \det(D) \det(P^{-1}) = \det(P) \times \frac{1}{\det(P)} \times \lambda \times \mu = \lambda\mu$ .
- (b) On calcule  ${}^t\vec{x}\vec{x} = x_1^2 + x_2^2 > 0$ .
2. On trouve  ${}^t\vec{u}H\vec{u} = rh^2 + 2shk + tk^2$ . Ainsi  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \simeq \frac{1}{2}{}^t\vec{u}H\vec{u}$ . On se ramène donc à l'étude du signe de  ${}^t\vec{u}H\vec{u}$ .
3. La matrice  $H$  est symétrique, elle est donc diagonalisable.
4. D'un côté,  ${}^t(H\vec{v})\vec{w} = {}^t(\lambda\vec{v})\vec{w} = \lambda{}^t\vec{v}\vec{w}$ . D'un autre côté, en se rappelant que  $H$  est symétrique, on a  ${}^t(H\vec{v})\vec{w} = {}^t\vec{v}{}^tH\vec{w} = {}^t\vec{v}(H\vec{w}) = {}^t\vec{v}(\mu\vec{w}) = \mu{}^t\vec{v}\vec{w}$ . Donc  $\lambda{}^t\vec{v}\vec{w} = \mu{}^t\vec{v}\vec{w}$  et comme  $\lambda \neq \mu$ , cela implique que  ${}^t\vec{v}\vec{w} = 0$ .
5.  $(\vec{v}, \vec{w})$  étant une base de  $\mathbb{R}^2$  (donc une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ ), tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  (et donc en particulier  $\vec{u}$ ) peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . Il existe donc deux réels  $\alpha, \beta$  tels que  $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ . Alors  ${}^t\vec{u}H\vec{u} = {}^t(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w})H(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = {}^t(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w})(\alpha H\vec{v} + \beta H\vec{w}) = {}^t(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w})(\alpha\lambda\vec{v} + \beta\mu\vec{w}) = \lambda\alpha^2{}^t\vec{v}\vec{v} + \mu\beta^2{}^t\vec{w}\vec{w}$ , en se rappelant que  ${}^t\vec{v}\vec{w} = 0$  et  ${}^t\vec{w}\vec{v} = {}^t({}^t\vec{v}\vec{w}) = 0$ .
6. Comme  $\alpha^2, \beta^2, {}^t\vec{v}\vec{v}, {}^t\vec{w}\vec{w}$  sont positifs, on peut se trouver dans les cas suivants :
  - Soient  $\lambda$  et  $\mu$  sont de même signe, alors  ${}^t\vec{u}H\vec{u}$  est de signe constant, et du signe de  $\lambda$  et  $\mu$ . Il s'ensuit que  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$  est de signe constant pour  $(h, k)$  proche de  $(0, 0)$  et  $f$  a donc un extremum local en  $M_0$ . Mais alors, comme  $H$  est diagonalisable, son déterminant est égal au produit des valeurs propres :  $rt - s^2 = \det(H) = \lambda\mu > 0$  puisque  $\lambda$  et  $\mu$  sont de même signe.
  - Soient  $\lambda$  et  $\mu$  sont de signes opposés, alors  ${}^t\vec{u}H\vec{u}$  n'est pas de signe constant. En effet, si l'on suppose (par exemple  $\lambda < 0$  et  $\mu > 0$ , alors  ${}^t\vec{u}H\vec{u} < 0$  si  $\beta = 0$  et  ${}^t\vec{u}H\vec{u} > 0$  si  $\alpha > 0$ ). Il s'ensuit que  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$  n'est pas de signe constant pour  $(h, k)$  proche de  $(0, 0)$  et  $f$  n'a donc pas d'extremum local en  $M_0$  (la fonction  $f$  décroît si, en partant de  $M_0$ , on se déplace dans la direction du vecteur  $\vec{v}$ , et croît si on se déplace dans la direction du vecteur  $\vec{w}$ ). Mais alors, comme  $H$  est diagonalisable, son déterminant est égal au produit des valeurs propres :  $rt - s^2 = \det(H) = \lambda\mu < 0$  puisque  $\lambda$  et  $\mu$  sont de signes contraires.
7. Dans le cas où  $\lambda = \mu, H$  est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre  $\lambda$  : d'après un résultat du cours, on a alors  $H = \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . On vérifie que  $H\vec{e}_1 = \lambda I_2\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_1, H\vec{e}_2 = \lambda I_2\vec{e}_2 = \lambda\vec{e}_2$ .  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont donc des vecteurs propres de  $H$  associés à la valeur propre  $\lambda$ , et non colinéaires, ils forment donc une base de  $\mathbb{R}^2$ . De plus on a  ${}^t\vec{e}_1\vec{e}_2 = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$ . En posant  $\vec{v} = \vec{e}_1, \vec{w} = \vec{e}_2$ , le raisonnement des questions 5 et 6 reste donc valable dans le cas où  $\lambda = \mu$ .